Extensão de Kruskall e estrutura causal

Alguns fatos vistos até agora:

(i) Há limites superiores para GM/R que objetos em equilíbrio estático podem ter;

(ii) Colapso da superfície do objeto esférico leva um tempo infinito p/ atingir $r = 2GM$ de acordo com observadores estáticos fora do objeto, mas leva um tempo-próprio finito de acordo com a superfície do objeto;

(iii) A métrica exterior de Schwarzschild parece "problemática" p/ $r \leq 2GM$.

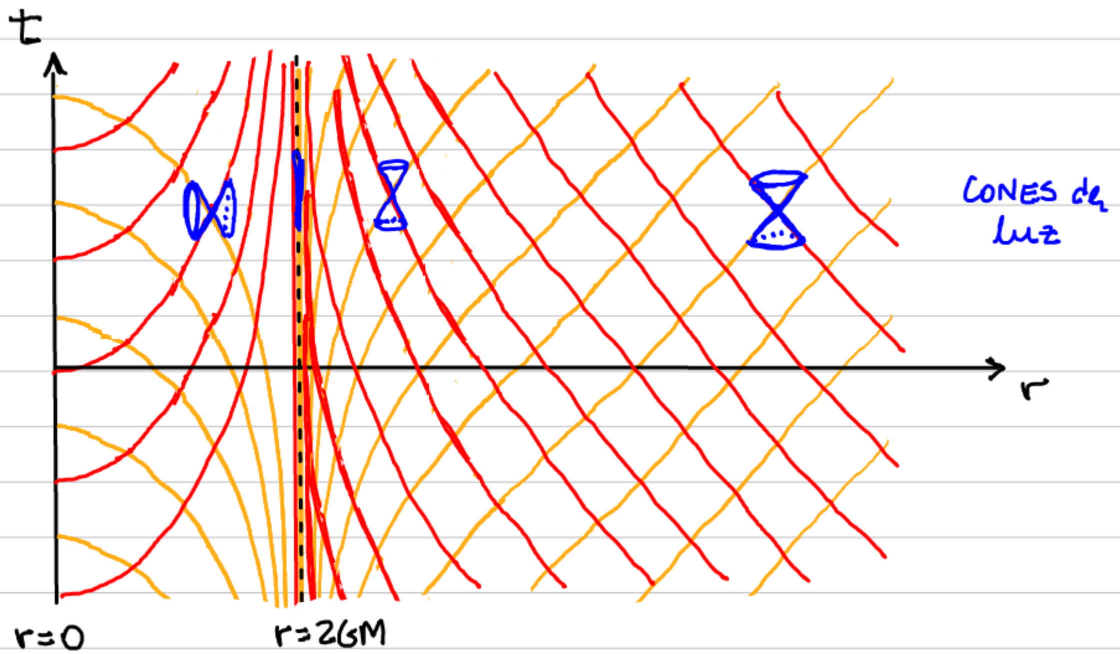
Por décadas o pensamento padrão foi que seria impossível um objeto de massa M colapsar para valores menores que seu raio de Schwarzschild ($2GM$). O ponto (iii) juntamente com a 1ª parte do ponto (ii) eram usados p/ sustentar isso. No entanto, trabalhos como o de Oppenheimer & Snyder de 1939 e, principalmente, o reconhecimento da 2ª parte do ponto (ii) mudaram a visão da comunidade, de modo que na década de 1960 a ideia de um "objeto" colapsado p/ uma região menor que seu raio de Schwarzschild (os <u>buracos negros</u>) passaram a fazer parte do hall de candidatos p/ explicar observações astrofísicas. (Curiosamente, tudo indica que Einstein morreu, em 1955, sem acreditar na realidade física de buracos negros.)

Uma vez admitindo a existência de "objetos" colapsados p/ regiões $r < 2GM$, é necessário entendermos o aparente "problema" dessas regiões no elemento-de-linha de Schwarzschild. Para isso, usaremos raios de luz (radiais) p/ explorar o espaço-tempo.

- <u>Raios de luz radiais</u>

$$0 = ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} \iff \begin{cases} r = cte = 2GM \\ \dfrac{dr}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} = \pm\, dt \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r(t) = 2GM \\ r(t) + 2GM \ln\left|\dfrac{r(t)}{2GM} - 1\right| = \pm t + C \end{cases}$$



Claramente, na coordenada t (que representa o tempo de observadores estáticos no infinito) os raios de luz nunca cruzam a esfera $r = 2GM$ (e raios de luz em $r(t) = 2GM$ estão aprisionados nessa esfera). Porém, vimos numa aula anterior que t <u>não</u> é um parâmetro afim das geodésicas radiais tipo-luz; na verdade, a própria coordenada radial r é um parâmetro afim (exceto p/ $r = 2GM$). Logo, todos os raios de luz na região $r > 2GM$ podem ser estendidos p/ a região $r < 2GM$ e vice-versa.

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Da equação horária de raios de luz encontrada acima, vemos que cada valor da constante C determina um raio de luz diferente (p/ cada escolha de sinal $\pm$ em t). Portanto, definindo as funções

$$v(t,r) := t + r + 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right| ,$$

$$u(t,r) := t - r - 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right| ,$$

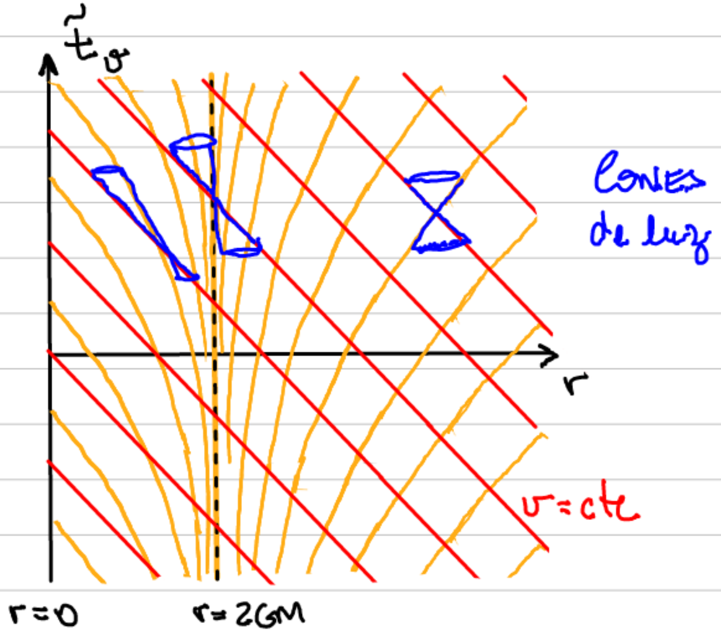
$v = cte$ representam os raios de luz que em $r > 2GM$ são "ingoing" e $u = cte$, representam os raios de luz que em $r > 2GM$ são "outgoings". Assim, definindo duas novas opções de coordenada temporal,

$$\tilde{t}_v := v - r ,$$

$$\tilde{t}_u := u + r ,$$

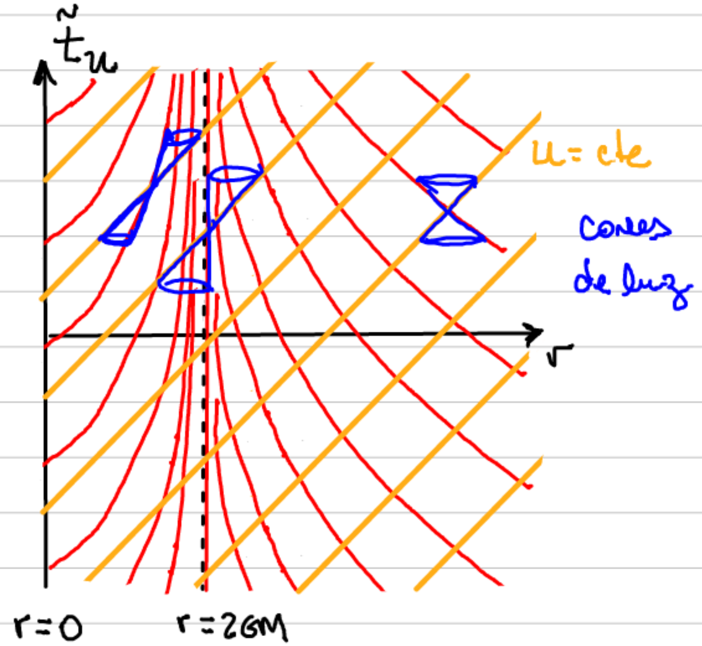
vemos que raios de luz "ingoing" em $r > 2GM$ (i.e., $v = cte$) serão retas com coeficiente angular -1 num diagrama $r \times \tilde{t}_v$, enquanto raios de luz "outgoings" em $r > 2GM$ serão retas com coeficiente angular $+1$ num diagrama $r \times \tilde{t}_u$. Essas coordenadas, $\{(\tilde{t}_v, r)\}$ e $\{(\tilde{t}_u, r)\}$, são frequentemente denominadas coordenadas de Eddington-Finkelstein, e elas são ideais p/ mostrar que o aparente "problema" em $r = 2GM$, que aparece nas coordenadas de Schwarzschild, se deve a uma escolha ruim de sistema de coordenadas. De fato, abaixo ilustramos os análogos, nessas coordenadas, do diagrama feito anteriormente, assim como a expressão do elemento-de-linha (Façam como exercício!):

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)d\tilde{t}_v^2 + \frac{4GM}{r}\,d\tilde{t}_v\,dr + \left(1+\frac{2GM}{r}\right)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$



Note que nessas coordenadas $\{(\tilde{t}_v, r)\}$ fica claro que a região $r<2GM$ não é causalmente desconectada de $r>2GM$ (como poderia parecer nas coordenadas $\{(t,r)\}$). Além disso, nessas coordenadas o comportamento dos cones de luz deixa claro que a região $r<2GM$ é influenciada mas não pode influenciar a região $r>2GM$; nada pode escapar dessa região $r<2GM$ e tudo que nela adentra é inexoravelmente "empurrado" p/ $r=0$.

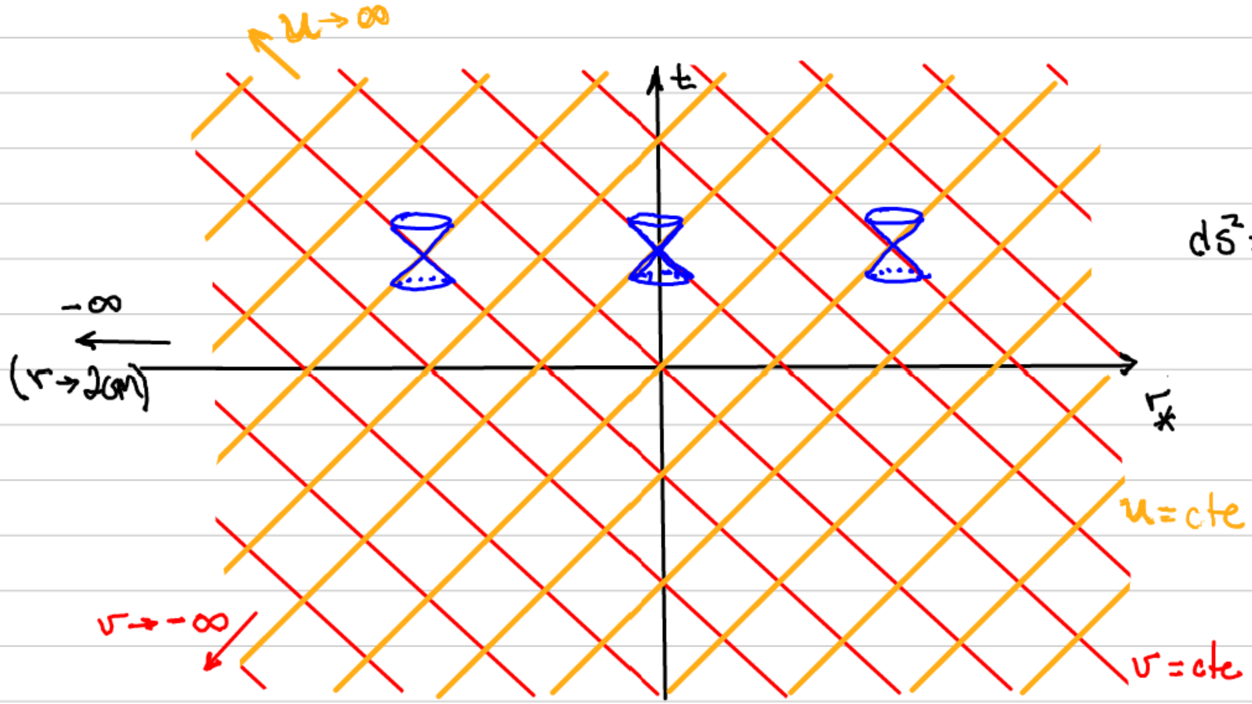
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)d\tilde{t}_u^2 - \frac{4GM}{r}\,d\tilde{t}_u\,dr + \left(1+\frac{2GM}{r}\right)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$



Note que nessas coordenadas $\{(\tilde{t}_u, r)\}$ fica claro que a região $r<2GM$ não é causalmente desconectada de $r>2GM$ (como poderia parecer nas coordenadas $\{(t,r)\}$). Além disso, nessas coordenadas o comportamento dos cones de luz deixa claro que a região $r>2GM$ é influenciada mas não pode influenciar a região $r<2GM$; nada pode entrar nessa região $r<2GM$ e tudo nela, vindo de $r=0$, é inexoravelmente "empurrado" p/ $r \geq 2GM$.

- **Coordenada "tartaruga" ("tortoise")**

A vantagem das coordenadas de Eddington-Finkelstein é deixar clara a relação causal entre diferentes regiões, ao "endireitar" os raios de luz ("ingoing" ou "outgoing", um de cada vez), representando-os como retas a 45°. Na tentativa de "endireitar" ambos os conjuntos de raios de luz, podemos definir como coordenadas as combinações $(u+v)/2$ $(= t)$ e $(v-u)/2$ $(= r + 2GM \ln|r/2GM - 1| =: r_*)$. Nessas coordenadas $\{(t, r_*)\}$ os raios de luz radiais são, por construção, representados por retas a $\pm 45°$. No entanto, o preço pago para isso foi "jogar" a esfera $r = 2GM$ p/ $r_* = -\infty$; ou seja, a região $r > 2GM$ é mapeada na região $-\infty < r_* < \infty$, sendo a região próxima a $r = 2GM$ expandida infinitamente. Essa coordenada radial r_* é chamada de coordenada de "tartaruga".



$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r(r_*)}\right)\left(-dt^2 + dr_*^2\right) + r(r_*)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

onde $r(r_*)$ é a inversa da função $r_*(r) = r + 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|$.

- ## Coordenadas de Kruskal - Szekeres

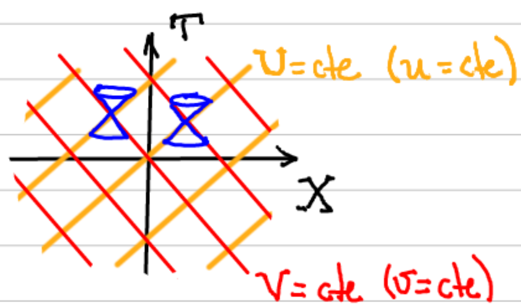
O procedimento de escolher coordenadas nas quais os cones de luz ficam orientados da maneira "padrão", como nas coordenadas de "tartaruga", ajuda a analisar a estrutura causal do espaço-tempo. No entanto, o mapeamento de $r = 2GM$ em $r_* = -\infty$ não reflete o fato que a região $r < 2GM$ é causalmente conectada com a região $r > 2GM$ (como mostrado pelas coordenadas de Eddington-Finkelstein). A ideia, então, será manter a orientação dos cones de luz mas trazer de volta $r = 2GM$ p/ uma região (coordenada) finita.

Para manter a orientação dos cones de luz, basta definirmos funções $U(u)$ e $V(v)$ e, então, definir novas coordenadas

$$T := \frac{V + U}{2},$$

$$X := \frac{V - U}{2}.$$

Assim, $v = \text{cte} \Rightarrow V = \text{cte} \Rightarrow T = -X + \text{cte}$, $u = \text{cte} \Rightarrow U = \text{cte} \Rightarrow T = X + \text{cte}$.



Por outro lado, p/ trazer $r=2GM$ p/ um valor finito de coordenadas T e X é necessário trazer $v=-\infty$ e $u=+\infty$ p/ valores finitos de V e U. Uma maneira natural de se conseguir isso é a seguinte:

$$V(v) := (2GM)\, e^{v/4GM} = e^{(t+r)/4GM}\sqrt{2GM}\sqrt{r-2GM}\,, \quad r>2GM$$

$$U(u) := -(2GM)\, e^{-u/4GM} = -e^{(r-t)/4GM}\sqrt{2GM}\sqrt{r-2GM}\,, \quad r>2GM$$

Com isso,

$$T = \sqrt{2GM}\sqrt{r-2GM}\, e^{r/4GM}\sinh(t/4GM)\,, \quad r>2GM\,,$$

$$X = \sqrt{2GM}\sqrt{r-2GM}\, e^{r/4GM}\cosh(t/4GM)\,, \quad r>2GM\,.$$

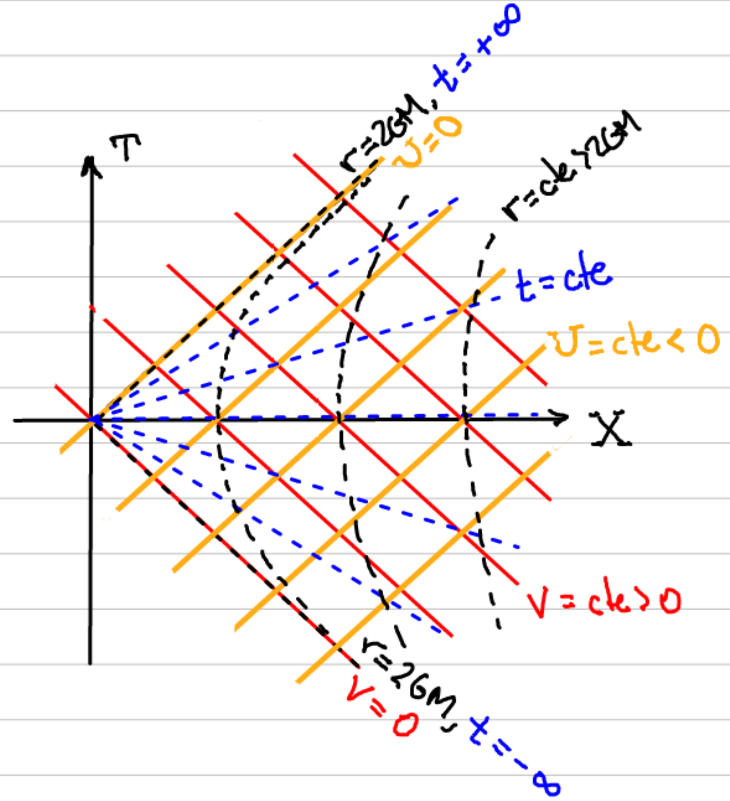
Nessas coordenadas (Kruskal-Szekeres), o elemento-de-linha assume a forma (mostre isso como exercício):

$$ds^2 = \frac{8GM\, e^{-r(T,X)/2GM}}{r(T,X)}\left(-dT^2+dX^2\right) + r(T,X)^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \quad r(T,X)>2GM$$

onde $r(T,X)>2GM$ é dado implicitamente por (mostre!)

$$\left[\frac{r(T,X)}{2GM}-1\right]e^{r(T,X)/2GM} = \frac{X^2-T^2}{(2GM)^2}\,.$$

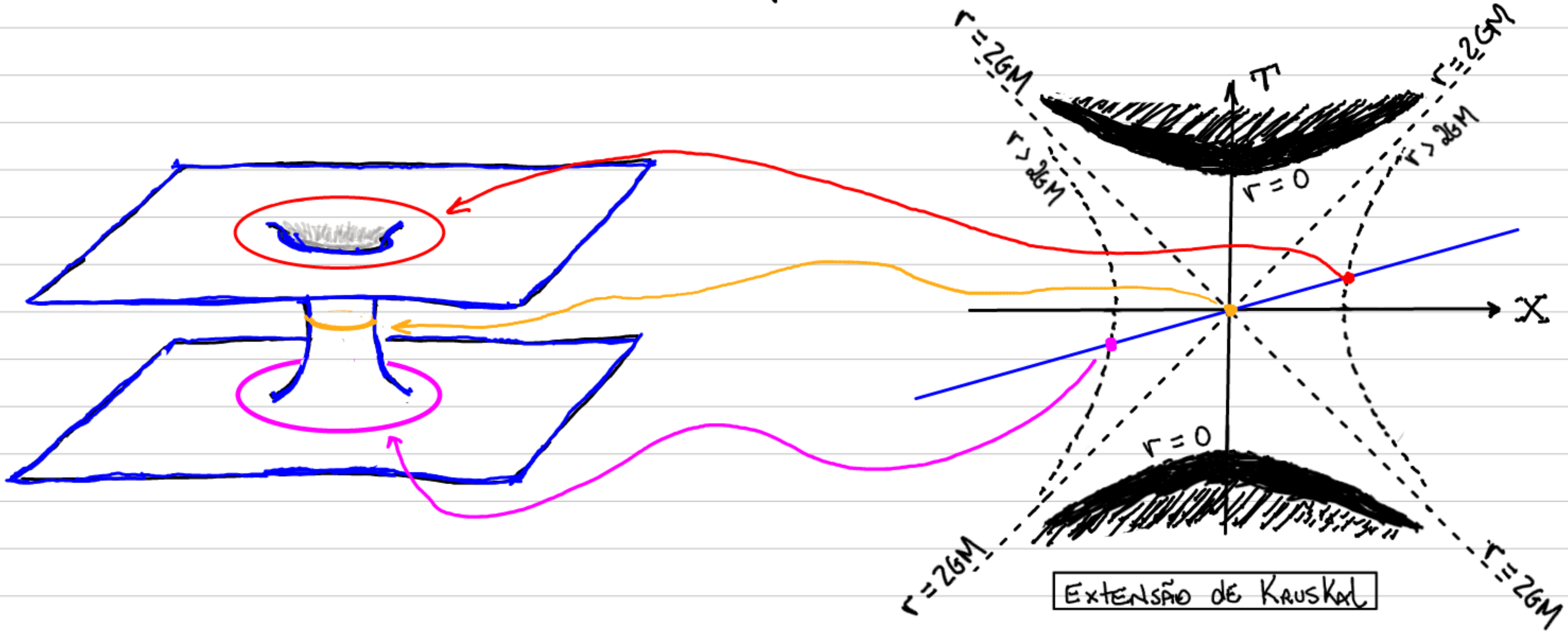
Ou seja, $r=\text{cte}>2GM$ são hipérboles nas coordenadas $\{(T,X)\}$. Além disso, $t=\text{cte}$ são semi-retas: $T=\tanh(t/4GM)\,X$.



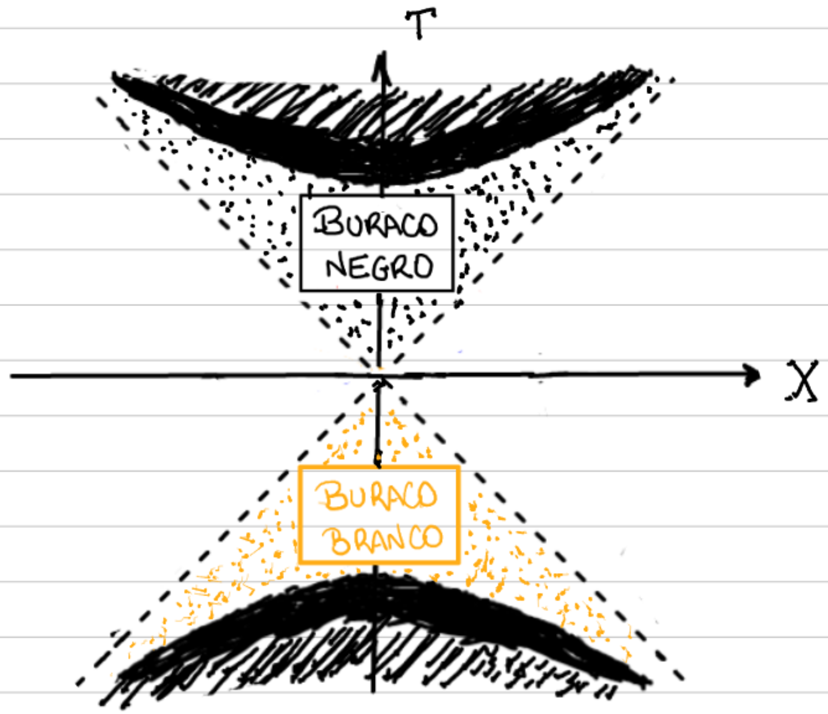
Embora as coordenadas V e U acima tenham sido definidas p/ V>0 e U<0 — portanto, T e X tenham sido definidas p/ X>|T| —, o elemento-de-linha acima não apresenta nenhum problema através de U=0 e V=0 (r=2GM) e para valores de T e X tais que

$$-(2GM)^2 < X^2 - T^2 \leq 0 \qquad (0 < r \leq 2GM)$$

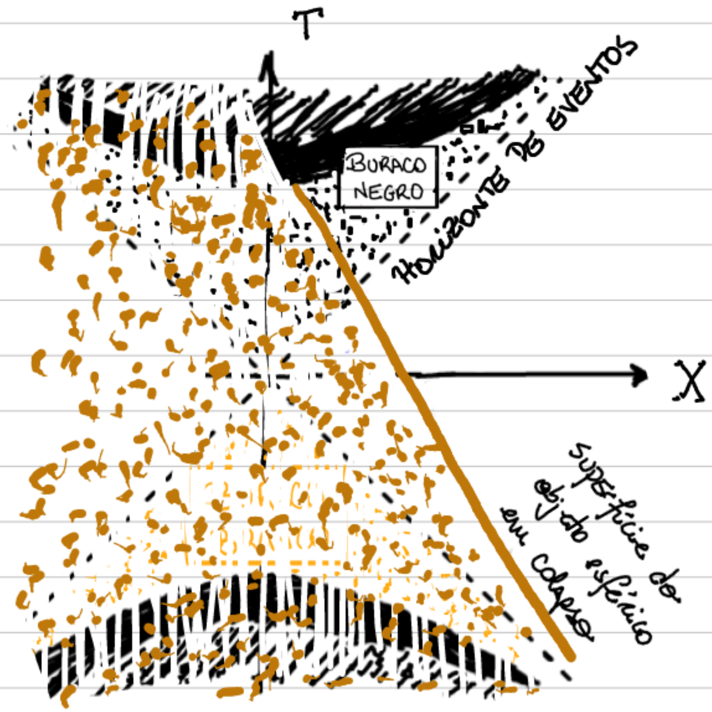
Portanto, o elemento-de-linha de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Szekeres $\{(T, X, \theta, \varphi)\}$ pode ser estendido p/ toda a região $X^2 > T^2 - (2GM)^2$:

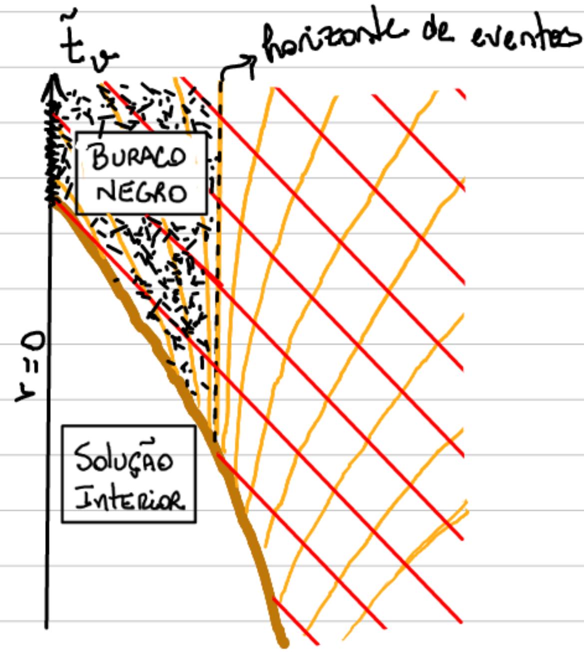


Buraco Negro Eterno



Buraco Negro Formado em Colapso (esférico)





- **Estrutura causal: Diagrama conforme (de Penrose)**

Uma forma ainda mais útil para analisar a estrutura causal do espaço é através dos chamados diagramas de Penrose, que são diagramas conformes (i.e., cones de luz orientados como em espaço plano), trazendo p/ uma região limitada as regiões ilimitadas do espaço-tempo, inclusive incluindo fronteiras a essas regiões limitadas (compactificação).

Repetindo a ideia de usar funções de u e v, separadamente, uma função promissora é arctg, que mapeia as regiões $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ em $(-\pi/2, 0)$ e $(0, \pi/2)$, respectivamente:

$$\bar{V} := \operatorname{arctg}(V/2GM) \Rightarrow d\bar{V} = \frac{2GM\, dV}{(2GM)^2 + V^2} = \cos^2(\bar{V}) \frac{dV}{2GM},$$

$$\bar{U} := \operatorname{arctg}(U/2GM) \Rightarrow d\bar{U} = \frac{2GM\, dU}{(2GM)^2 + U^2} = \cos^2(\bar{U}) \frac{dU}{2GM}.$$

Com isso, $-dT^2 + dX^2 = -dV\,dU = \frac{-(2GM)^2 d\bar{V}\, d\bar{U}}{\cos^2(\bar{V})\cos^2(\bar{U})}$, de modo que, mais uma vez definindo as coordenadas

$$\bar{t} := \frac{\bar{V} + \bar{U}}{2}, \quad \bar{x} := \frac{\bar{V} - \bar{U}}{2},$$

o elemento-de-linha assume a forma

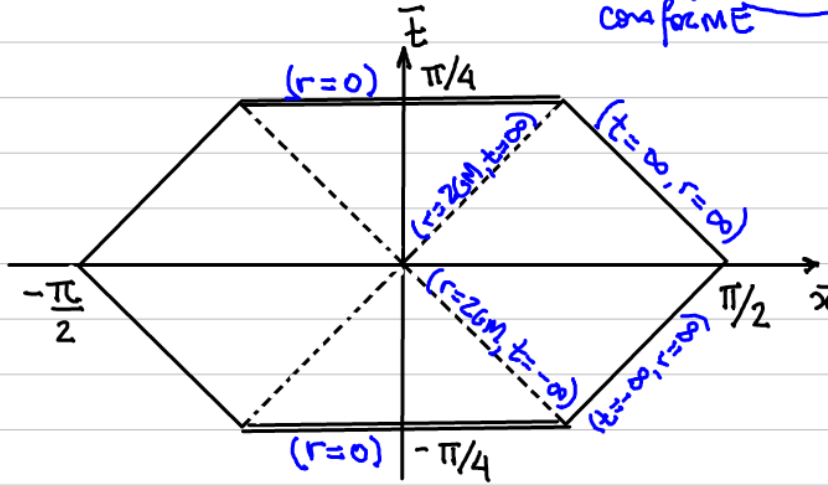
$$ds^2 = \frac{32 G^3 M^3 \, e^{-r(\bar{t},\bar{x})/2GM} \left(-d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2\right)}{r(\bar{t},\bar{x}) \cos^2(\bar{t}+\bar{x}) \cos^2(\bar{t}-\bar{x})} + r(\bar{t},\bar{x})^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right),$$

onde $r(\bar{t},\bar{x})$ satisfaz $\left(\frac{r(\bar{t},\bar{x})}{2GM} - 1\right) e^{r(\bar{t},\bar{x})/2GM} = -\operatorname{tg}(\bar{t}+\bar{x}) \operatorname{tg}(\bar{t}-\bar{x})$. (Entenda o porquê.)

Novamente, embora $\bar{v}$ e $\bar{u}$ tenham sido definidas p/ $0 \leq \bar{v} < \pi/2$ e $-\pi/2 < \bar{u} \leq 0$, o elemento-de-linha acima é bem definido para qualquer valor $\bar{v} \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $\bar{u} \in (-\pi/2, \pi/2)$ desde que $r(\bar{t},\bar{x}) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Exercício: Mostre que } r = 0 \Leftrightarrow \bar{t} = \pm \pi/4.}$$

Com isso, nas coordenadas $\{(\bar{t},\bar{x})\}$ o espaço-tempo (estendido) de Schwarzschild é representado como:



transf. conforme

Esse diagrama munido do elemento-de-linha (não-físico)

$$d\bar{s}^2 := \Omega^2(\bar{t},\bar{x}) \, ds^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + \Omega^2(\bar{t},\bar{x}) \, r^2(\bar{t},\bar{x}) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

(onde Ω^2 é a função positiva apropriada inferida pela igualdade, com $\Omega^2 = 0$ apenas na fronteira do diagrama) é rigorosamente causalmente equivalente ao espaço-tempo físico que ele representa — mesmo p/ raios de luz não radiais. Nesse diagrama compactificado conforme, denominado diagrama de Penrose, as fronteiras são incluídas ($r = \infty$, $t = \pm\infty$).