Solução de Schwarzschild

→ Sol. de Schwarzschild exterior: Espaço-tempo estático, esfericamente simétrico de <u>vácuo</u>; modela o espaço-tempo <u>fora</u> de um corpo esférico estático.

→ Sol. de Schwarzschild interior: Espaço-tempo estático, esfericamente simétrico; modela o espaço-tempo <u>dentro</u> de um corpo esférico estático.

- <u>Estacionaridade</u>: $\exists$ campo de Killing tipo-tempo, cujas linhas integrais representam a translação de simetria temporal.

- <u>Estaticidade</u>: Estacionaridade em que existe uma hiperfície Σ (tipo-espaço) ortogonal ao campo de Killing tipo-tempo da estacionaridade.

Fisicamente: estaticidade $= \begin{cases} \text{invariância por } \underline{\text{translação}} \text{ temporal (ESTACIONARIDADE)} \\ + \\ \text{invariância por } \underline{\text{inversão}} \text{ temporal} \end{cases}$

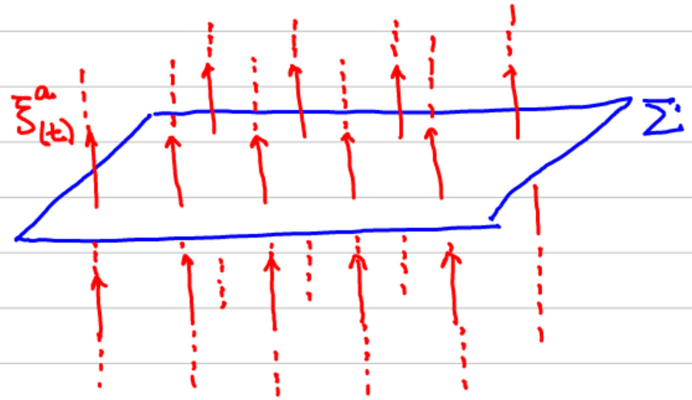
<u>Exemplo</u>:

ESTACIONARIDADE

objeto axissimétrico em rotação uniforme

ESTATICIDADE

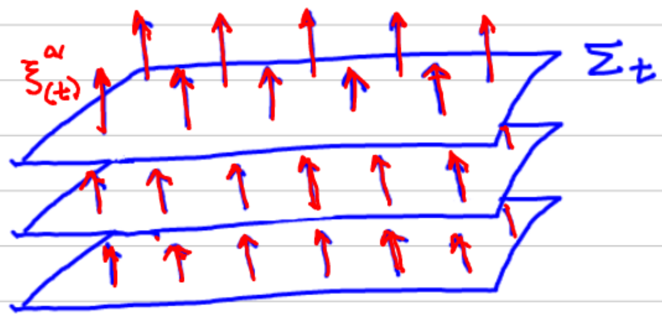
QUALQUER DISTRIBUIÇÃO DE MATÉRIA-ENERGIA SEM fluxos



Supondo que $\xi^a_{(t)}$ não se anule em Σ_i, podemos usar as isometrias ϕ_t geradas por $\xi^a_{(t)}$ p/ definir a família de hiperfícies $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ como sendo a imagem de Σ_i por ϕ_t:

$$\Sigma_t = \phi_t[\Sigma_i].$$

Por ϕ_t ser uma isometria, segue que Σ_t é isométrico a Σ_i e $\xi^a_{(t)}$ também é ortogonal a cada Σ_t



Além disso, podemos escolher coordenadas $\{x^j\}_{j=1,2,3}$ arbitrárias em Σ_i e "carregá-las" ao longo de cada órbita da isometria temporal:

$$x^j(\phi_t(p)) = x^j(p) \quad , \forall\, p \in \Sigma_i$$

Com isso, cada evento dessa região $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ é localizado pelas coordenadas $\{t, x^j\}$; ou seja, $\xi^a_{(t)}$ é escolhido como um dos vetores da base coordenada: $\xi^a_{(t)} = \partial^a_t$. Nessas coordenadas:

$$\boxed{ds^2 = g_{00}(x^j)\,dt^2 + g_{kl}(x^j)\,dx^k dx^l}$$

(Ou seja, nenhuma das componentes da métrica depende de t e ∂^a_j são ortogonais a ∂^a_t.)

Exercício: Mostre que: (a) $g_{00} = (\xi^a_{(t)} \xi_{(t)a})$;

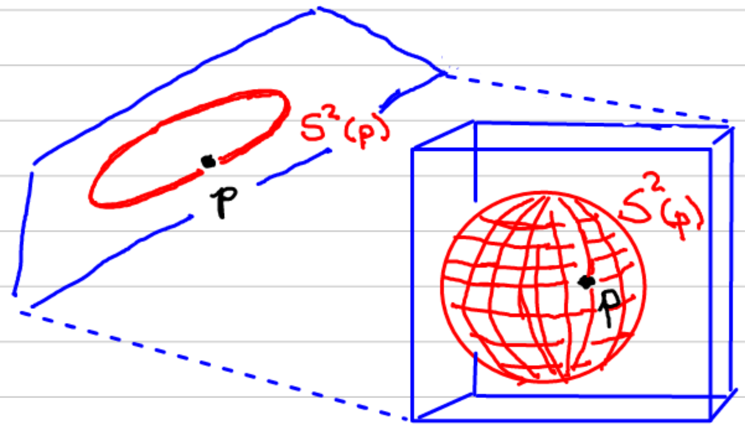
(b) $\xi^b_{(t)} \nabla_b (\xi^a_{(t)} \xi_{(t)a}) = 0$ (ou seja, $\partial/\partial t\, g_{00} = 0$), a partir da equação de Killing (na forma covariante).

- **Simetria esférica**: O grupo de isometrias do espaço-tempo contém um subgrupo isomorfo a $SO(3)$ e as órbitas geradas por esse subgrupo são esferas bidimensionais.

Exercício: Para a métrica de uma esfera de "raio" R, cujo elemento-de-linha nas coordenadas usuais é dado por $dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi)$, calcule, a partir da Eq. de Killing, 3 campos de Killing L.I. Em seguida, calcule os comutadores entre eles e relacione os resultados com os próprios campos de Killing — ou seja, coloque o resultado na forma

$$[\xi_{(j)}, \xi_{(k)}]^a = \sum_{l=1}^{3} C^l_{jk}\, \xi^a_{(l)},$$

obtendo explicitamente as "constantes de estrutura" C^l_{jk}.



Podemos, então, definir uma coordenada chamada "raio areal", r, de modo que:

$$r(p) := \sqrt{\frac{\text{Área}(S^2(p))}{4\pi}} ,$$

o que faz com que o elemento-de-linha sobre $S^2(p)$ seja dado por:

$$dl^2_{S^2(p)} = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) ,$$

onde $\{(\theta,\varphi)\}$ são coordenadas esféricas usuais. A maneira como diferentes esferas S^2 são cobertas pelas coordenadas $\{(\theta,\varphi)\}$ é tal que qualquer geodésica <u>ortogonal a S^2</u> em (θ,φ) possui $\theta = cte$ e $\varphi = cte$. Com isso:

$$\boxed{ds^2 = g_{00}(x^0,r)(dx^0)^2 + 2g_{0r}(x^0,r)dx^0 dr + g_{rr}(x^0,r)\, dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}$$

<u>Métrica de Schwarzschild</u>: Simetria esférica + Estaticidade

O campo de Killing $\xi^a_{(t)}$ (supondo ser único) tem que ser ortogonal a cada S^2 e a $\nabla^a r = g^{ab} \nabla_b r$. Assim:

$$\boxed{ds^2 = -f(r)\, dt^2 + g(r)\, dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}$$

Exercício: Calcule as componentes do tensor de Einstein para a métrica de Schwarzschild nas coordenadas acima

Exercício: Como um "check" de consistência dos resultados obtidos no exercício anterior, verifique a identidade de Bianchi