Derivada Covariante

→ Estender a noção de derivada para atuar em campos vetoriais e, a partir daí, generalizar p/ tensores de qualquer posto;

→ Veremos que a noção de derivada de tensores, cujo resultado também é um tensor — derivada covariante —, não é única pois depende das possíveis maneiras de se identificar vetores em pontos diferentes (ou seja, depende das funções ψ_p, $p \in \Sigma$);

Definição através de suas propriedades

Já vimos que vetores podem ser vistos como operadores derivada (direcional) atuando em funções suaves. Vimos também que essa visão leva a um operador ∇_a atuando em funções, levando a covetores: $\nabla_a f$. A idéia é estender a atuação de ∇_a a campos vetoriais. Isso será feito pelas propriedades que desejamos p/ essa atuação. Sejam u^a, v^a campos tensoriais, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}$. Então, exige-se que:

(i) $\nabla_a(u^b + \alpha v^b) = \nabla_a u^b + \alpha \nabla_a v^b$; (Linearidade)

(ii) $\nabla_a(f u^b) = (\nabla_a f) u^b + f \nabla_a u^b$; (regra de Leibniz)

além das propriedades já vistas quando ∇_a atua em funções.

Uma vez impondo essas propriedades, duas questões surgem: de existência e de unicidade.

- **Existência:**

Considere um conjunto de $n\,(=4)$ campos vetoriais suaves, $\{\varphi^a_\mu\}_{\mu=0,1,\dots,n-1}$, de modo que em cada evento esse conjunto seja L.I. (Por exemplo, poderia ser uma base induzida por um sistema de coordenadas qualquer.) Como esse conjunto é L.I., qualquer campo suave v^a pode ser expresso como:

$$v^a = v^\mu \varphi^a_\mu .$$

Seja $\{\omega^\mu_a\}$ o conjunto de covetores dual a $\{\varphi^a_\mu\}$: $\omega^\mu_a \varphi^a_\nu = \delta^\mu_\nu$. Então, definimos o operador ∇_a através de:

$$\nabla_a \varphi^b_\mu := 0 \quad \text{e} \quad \nabla_a f := \varphi_\mu(f)\,\omega^\mu_a ,$$

Com isso, atuando num campo vetorial arbitrário v^a, temos

$$\nabla_a v^b = \nabla_a(v^\mu \varphi^b_\mu) = (\nabla_a v^\nu)\,\varphi^b_\nu + v^\mu \cancelto{0}{\nabla_a \varphi^b_\mu} = \varphi_\mu(v^\nu)\,\omega^\mu_a \varphi^b_\nu$$

É fácil verificar que ∇_a assim definido satisfaz todas as propriedades desejadas.

$$\boxed{\text{Exemplo:}\quad v(f) = v^\mu \varphi_\mu(f) = v^\nu \delta^\mu_\nu \varphi_\mu(f) = v^\nu \omega^\mu_a \varphi^a_\nu\, \varphi_\mu(f) = v^a \nabla_a f\,.}$$

- Unicidade:

A construção acima p/ provar a existência de um operador com as propriedades desejadas na verdade já deixa claro que existem infinitos operadores satisfazendo as mesmas: cada escolha de $\{\psi^a_\mu\}$ diferente leva a um operador ∇_a diferente. Logo, apenas as propriedades impostas não são suficientes p/ fixar um único ∇_a.

Sejam ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$ dois operadores satisfazendo as propriedades dadas. Segue que:

(i) $u^a(\tilde{\nabla}_a f - \nabla_a f) = u(f) - u(f) = 0, \ \forall\, u \in \mathcal{T}_p \Rightarrow \tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f$

(ii) $\tilde{\nabla}_a(fu^b) - \nabla_a(fu^b) = \cancel{(\tilde{\nabla}_a f)}u^b + f\tilde{\nabla}_a u^b - \cancel{(\nabla_a f)}u^b - f\nabla_a u^b = f(\tilde{\nabla}_a u^b - \nabla_a u^b), \forall f \in \mathcal{F}$, $u^a \in \mathcal{T}_p$

A igualdade acima mostra que a diferença entre $\tilde{\nabla}_a u^b - \nabla_a u^b$ em cada ponto depende apenas do valor de u^a no mesmo ponto. Isso porque, sendo $f(p) = 1$ e $g(p) = 0$, com $f(q)$ e $g(q)$ qualquer p/ $q \neq p$, temos:

$$\left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(fu^b + gv^b)\right]\Big|_p = \left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)u^b\right]\Big|_p .$$

Unindo à linearidade em u^a, temos:

$$\nabla_a u^b = \tilde{\nabla}_a u^b + C^b_{ac}u^c \quad \text{, onde } C^b_{ac} \text{ é um tensor de posto } (1,2).$$

Logo, qualquer que seja o operador derivada que estejamos interessados, sempre podemos relacioná-lo com qualquer outro através de um tensor C^b_{ac} apropriado.

- ## Derivada covariante e derivada parcial

Acima vimos que qualquer escolha de n campos vetoriais suaves induz um possível operador derivada, que denotaremos por $\tilde{\nabla}_a$. Em particular, dado um sistema de coordenadas qualquer, a base coordenada associada satisfaz as condições p/ definir um operador derivada. Assim, identificando $\varphi^a_\mu \equiv \partial^a_\mu$ na construção anterior, temos:

$$v^\mu \tilde{\nabla}_\mu f = v^a \nabla_a f = v(f) = v^\mu \partial_\mu (f) \overset{\forall v^a}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \tilde{\nabla}_a f = (\partial_\mu f)(dx^\mu)_a , \\ (\tilde{\nabla} f)_\mu = \partial_\mu f \end{cases}$$

onde $\{(dx^\mu)_a\}$ é a base dual a $\{\partial^a_\mu\}$.

Usando essa escolha de $\tilde{\nabla}_a$ como associada a um sistema de coordenadas, representaremos C^a_{bc} por Γ^a_{bc}, obtendo:

$$\nabla_a v^b = \tilde{\nabla}_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c = (\tilde{\nabla}_a v^\mu)\partial^b_\mu + \Gamma^\mu_{ac} v^c \partial^b_\mu =$$

$$= (\partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma)\, \partial^b_\mu (dx^\nu)_a$$

Note que, nesse caso $\nabla_a \partial^b_\mu = \Gamma^b_{a\mu} \Longleftrightarrow \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = (dx^\alpha)_a \partial^b_\beta \nabla_b \partial^a_\gamma$. Ou seja, as componentes $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ "medem" como os elementos de uma base coordenada variam ao longo deles mesmos, segundo a noção de derivada dada por ∇_a.

Atenção: Note que fixados os operadores ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$, C^a_{bc} é um tensor legítimo. Em particular se $\tilde{\nabla}_a$ for o operador derivada associado a uma base coordenada como acima, $C^a_{bc} \equiv \Gamma^a_{bc}$, e o mesmo vale para Γ^a_{bc} desde que não se mude $\tilde{\nabla}_a$ (por exemplo, quando se muda o sistema de coordenadas). Porém, não é normalmente isso que se usa. É mais útil, ao se mudar de um sistema de coordenadas φ p/ φ', que induzem, respectivamente, as bases coordenadas $\{\partial^a_\mu\}$ e $\{\partial'^a_\mu\}$, mudarmos também o operador $\tilde{\nabla}_a$ em relação ao qual o operador ∇_a é expresso:

$$\varphi \mapsto \varphi' ,$$

$$\{\partial^a_\mu\} \mapsto \{\partial'^a_\mu\} ,$$

$$\tilde{\nabla}_a \partial^b_\mu = 0 \mapsto \tilde{\nabla}_a \partial'^b_\mu = 0 ,$$

de modo que

$$\nabla_a v^b = (\partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} v^\alpha)(dx^\mu)_a (\partial^b_\nu)$$

$$= (\partial'_\mu v'^\nu + \Gamma'^\nu_{\mu\alpha} v'^\alpha)(dx'^\mu)_a (\partial'^b_\nu)$$

Nesse caso, $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$ e $\Gamma'^\nu_{\mu\alpha}$ são componentes de tensores diferentes. Esses coeficientes numéricos, que relacionam a derivada de interesse ∇_a com as derivadas (parciais) associadas a cada sistema de coordenadas, são chamados de símbolos de Christoffel.

No contexto de Relatividade Geral, o operador ∇_a definido acima — que por enquanto só atua em $\mathcal{F}$ e $T\xi$ — é chamado de derivada covariante. (Em geometria diferencial, ∇_a é mais comumente chamado de conexão.)

Exercício: Reobtenha a expressão acima para as componentes de $\nabla_a v^b$ numa base coordenada, lembrando que $\partial^a_\mu \nabla_a \partial^b_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\partial^b_\alpha$.

Solução: Dado um sistema de coordenadas $\varphi: \mathcal{O} \to U \subseteq \mathbb{R}^4$, vimos que podemos construir uma base (coordenada), $\{\partial^a_\mu\}$, definida por:

$$\partial^a_\mu(f) := \frac{\partial}{\partial x^\mu} f\circ\varphi^{-1}(x^\alpha) \quad , \text{ onde } \quad \varphi(p) = x^\alpha(p)$$

Assim sendo, temos (usando propriedades demonstradas no exercício acima):

$$u^a \nabla_a v^b = u^\mu \partial^a_\mu \nabla_a (v^\nu \partial^b_\nu) = u^\mu \partial^a_\mu (\nabla_a v^\nu)\,\partial^b_\nu + u^\mu v^\nu \underbrace{\partial^a_\mu \nabla_a \partial^b_\nu}_{=\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial^b_\alpha} \in T\xi \text{ p/ cada } \mu,\nu$$

$$= u^\mu \partial^a_\mu (v^\nu)\,\partial^b_\nu + u^\mu v^\nu\, \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\partial^b_\alpha =$$

$$= u^\mu \left[\partial_\mu v^\nu + v^\alpha\, \Gamma^\nu_{\mu\alpha}\right]\partial^b_\nu .$$

Dessa expressão pode-se extrair as componentes de $\nabla_a v^b$ (imprecisamente denotada por $\nabla_\mu v^\nu$ — quando o mais correto seria $(\nabla v)_\mu{}^\nu$) na base coordenada (e sua dual):

$$\boxed{\nabla_\mu v^\nu \equiv (\nabla v)_\mu{}^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} v^\alpha}$$

- **Estendendo ∇_a p/ tensores de posto arbitrário**

Até agora, só estabelecemos o processo de derivação p/ funções ($\in \mathcal{F}$) e campos tensoriais ($\in \mathcal{T}\xi$). Isso basta, no entanto, p/ estendermos a definição de sua atuação a campos tensoriais que qualquer posto. Primeiramente, temos que estender ∇_a p/ atuar em covetores ($\in \mathcal{T}^*\xi$):

- Seja ω_a um campo de covetores. P/ cada campo vetorial u^a, $\omega_a u^a$ é uma função. Logo, $\nabla_a(\omega_b u^b)$ é bem definida. Se impusermos que ∇_a satisfaça a regra de Leibnitz, então:

$$\nabla_a(\omega_b u^b) =: (\nabla_a \omega_b) u^b + \omega_b \nabla_a u^b \iff$$

$$\iff \quad u^b (\nabla_a \omega_b) := \nabla_a(\omega_b u^b) - \omega_b \nabla_a u^b \quad , \forall\, u^a \in \mathcal{T}\xi$$

Note, portanto, que conseguimos calcular $(\nabla_a \omega_b)$ através do lado direito da expressão acima aplicada p/ um conjunto de campos vetoriais u^a.

Exercício: Mostre que o lado direito da expressão anterior p/ $u^b \nabla_a \omega_b$ de fato define um tensor de posto $(0,2)$, $\nabla_a \omega_b$, cujas componentes numa base induzida por um sistema de coordenadas $\varphi(p) = x^\mu(p)$ são dados por:

$$\boxed{(\nabla_\mu \omega_\nu) \equiv (\nabla \omega)_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \omega_\alpha} \, ,$$

onde ω_μ são as componentes de ω_a na base coordenada (dual) e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são os mesmos coeficientes introduzidos no exercício anterior

(Sugestão: use o resultado do exercício anterior)

Uma vez tendo estendido a atuação de ∇_a p/ covetores, sua atuação em tensores de posto arbitrário fica determinada pela regra de Leibnitz e a definição de tensores como mapeamentos multilineares.

Exemplo: Seja g_{ab} um campo tensorial de posto $(0,2)$. Vamos determinar a atuação de ∇_a nesse tensor e obter as componentes do resultado.

$$\nabla_a(g_{bc}u^b v^c) = (\nabla_a g_{bc})u^b v^c + g_{bc}(\nabla_a u^b)v^c + g_{bc}u^b\nabla_a v^c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u^b v^c \nabla_a g_{bc} = \nabla_a(g_{bc}u^b v^c) - g_{bc}(\nabla_a u^b)v^c - g_{bc}u^b\nabla_a v^c$$

Logo, $\nabla_a g_{bc}$ é determinado pela expressão acima aplicada p/ um conjunto de vetores u^a, v^a. Utilizando o resultado do penúltimo exercício, temos, em termos de componentes:

$$(\partial^a_\mu)\, u^b v^c \nabla_a g_{bc} = \partial^a_\mu \nabla_a(g_{bc}u^b v^c) - \partial^a_\mu \nabla_a u^b\, g_{bc}v^c - \partial^a_\mu \nabla_a v^c\, g_{bc}u^b =$$

$$= \partial_\mu(g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta) - (\partial_\mu u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}u^\lambda)g_{\alpha\beta}v^\beta - (\partial_\mu v^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\lambda}v^\lambda)g_{\alpha\beta}u^\alpha$$

$$= (\partial_\mu g_{\alpha\beta})u^\alpha v^\beta + \cancel{(\partial_\mu u^\alpha)g_{\alpha\beta}v^\beta} + \cancel{(\partial_\mu v^\beta)g_{\alpha\beta}u^\alpha} - \cancel{(\partial_\mu u^\alpha)g_{\alpha\beta}v^\beta} +$$

$$- \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} u^{\lambda} g_{\alpha\beta} v^{\beta} - \cancel{(\partial_\mu v^{\beta}) g_{\alpha\beta} u^{\alpha}} - \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} v^{\lambda} g_{\alpha\beta} u^{\alpha} =$$

$$= u^{\alpha} v^{\beta} \left(\partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} g_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} g_{\alpha\lambda} \right).$$

Logo, as componentes de $\nabla_a g_{bc}$ numa base coordenada são:

$$\boxed{\nabla_\mu g_{\alpha\beta} \equiv (\nabla g)_{\mu\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} g_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} g_{\alpha\lambda}}$$

Exercício: Calcule as componentes da derivada covariante de um tensor de posto (k,l) arbitrário. Certifique-se de que você entende o padrão geral que aparece nessa expressão

- **Torção nula**

Anteriormente, definimos o comutador de dois campos tensoriais u^a e v^a por:

$$[u,v](f) := u(v(f)) - v(u(f)) = (u^{\mu} \partial_\mu v^{\nu} - v^{\mu} \partial_\mu u^{\nu})(\partial_\nu f)$$ onde u^μ e v^μ

são as componentes de u^a e v^a na base coordenada $\{\partial^a_\mu\}$.
No entanto, note que

$$[u,v](f) := u(v(f)) - v(u(f)) = u^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) - v^a \nabla_a (u^b \nabla_b f) =$$

$$= (u^a \nabla_a v^b - v^a \nabla_a u^b) \nabla_b f + u^a v^b (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f =$$

$$= \left(u^\mu \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} u^\mu v^\alpha - v^\mu \partial_\mu u^\nu - \Gamma^\nu_{\mu\alpha} v^\mu u^\alpha \right) \partial_\nu f + u^a v^b (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f =$$

$$= \left(u^\mu \partial_\mu v^\nu - v^\mu \partial_\mu u^\nu \right) \partial_\nu f + \left[\left(\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} \right) \nabla_c f + (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f \right] u^a v^b$$

Portanto, concluímos que

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) f = \left(\Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab} \right) \nabla_c f =: T^c_{ab} \nabla_c f ,$$

onde $T^c_{ab} := \Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab}$ é chamado de tensor de torção. Ele "mede" o quanto o operador derivada covariante falha em comutar quando aplicado em funções.

Atenção: Em Relatividade Geral, é assumido de partida que a derivada covariante de interesse físico possui torção nula. Note que isso equivale a dizer que os símbolos de Christoffel são simétricos:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$$

qualquer que seja o sistema de coordenadas adotado. É importante ter em mente, portanto, que em RG:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad , \forall f \in \mathcal{F} .$$

- **A conexão de Levi-Civita** (ou **a derivada covariante compatível c/ a métrica**)

Até agora, vimos que existe infinitas noções distintas de derivada covariante compatível com as propriedades que impusemos. Porém, é importante ter um critério físico que selecione, dentre as infinitas, qual de fato mede variações no espaço-tempo.

Note que determinar ∇_a equivale a determinar $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ num sistema de coordenadas qualquer. Por sua vez, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ compreende 40 valores reais independentes em cada evento. Logo, p/ determinar ∇_a precisamos fornecer 40 vínculos (equações)

O objeto fundamental da R.G. é o tensor métrico g_{ab}, lembrando que o mesmo é um tensor simétrico de posto $(0,2)$, não-degenerado (ou seja, se $g_{ab} u^b = 0$, então $u^b = 0$), com assinatura Lorentziana (ou seja, existe $u^a \in \mathcal{T}_{\xi}$ tal que $g_{ab} u^a u^b < 0$ e qualquer $v^a \neq 0$ satisfazendo $g_{ab} u^a v^b = 0$ também satisfaz $g_{ab} v^a v^b > 0$).

A métrica é responsável, em cada evento $p \in \xi$, por fornecer uma noção de "tamanho" p/ os elementos de V_p, o que, por sua vez, fornece uma noção de "distância" (ou melhor, intervalo invariante) para pontos arbitrariamente próximos.

A condição que será imposta p/ selecionar ∇_a é que se dois vetores u^a e v^a são transportados ao longo de uma curva arbitrária (com tangente w^a) satisfazendo $w^b \nabla_b u^a = w^b \nabla_b v^a = 0$ (transporte paralelo), então

$$w^a \nabla_a (g_{bc} u^b v^c) = 0 ;$$

ou seja: a noção de transporte paralelo e "produto interno" entre os vetores. Como isso vale p/ quaisquer vetores u^a, v^a e curva c/ tangente w^a, temos:

$$0 = w^a \nabla_a (g_{bc} u^b v^c) = w^a u^b v^c \nabla_a g_{bc} , \ \forall u^a, v^a, w^a \iff$$

$$\iff \boxed{\nabla_a g_{bc} = 0}$$

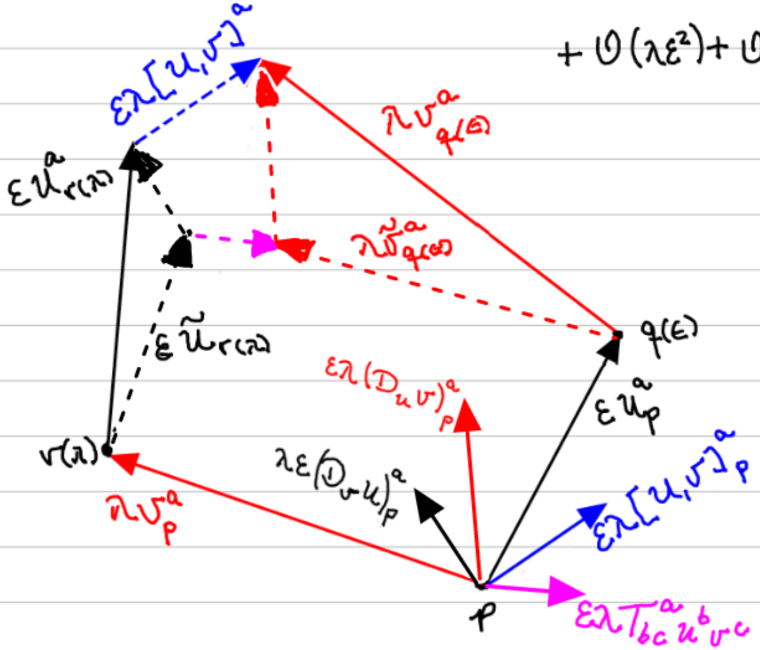
Essa é a chamada condição de compatibilidade de ∇_a com a métrica g_{ab}. Note que essa equação tensorial resume 40 equações numéricas em cada evento. Logo, é razoável esperar que essa condição seja suficiente p/ determinar completamente ∇_a (como de fato ocorre). Na literatura matemática, ∇_a satisfazendo a equação acima é chamada de conexão de Levi-Civita.

Exercício: A partir das componentes de $\nabla_a g_{bc}$ numa base coordenada qualquer, mostre que essa condição implica que os símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ são dados por

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (\partial_\beta g_{\gamma\mu} + \partial_\gamma g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}) ,$$

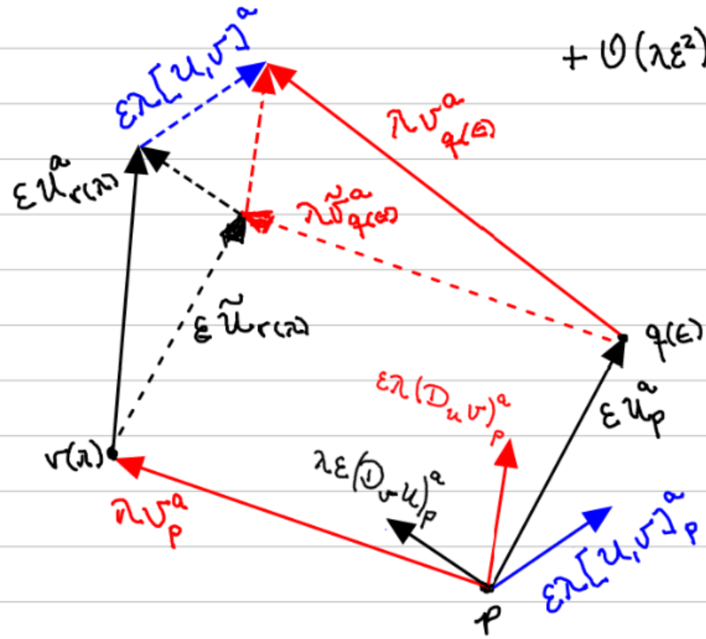
onde $g^{\alpha\mu}$ são as componentes do tensor g^{ab} definido por $g^{ab} g_{bc} = g_{cb} g^{ba} = \delta^a_c$.

∇_a com torção



$$+\mathcal{O}(\lambda\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\lambda^2\varepsilon)$$

∇_a sem torção



$$+\mathcal{O}(\lambda\varepsilon^2)+\mathcal{O}(\lambda^2\varepsilon)$$