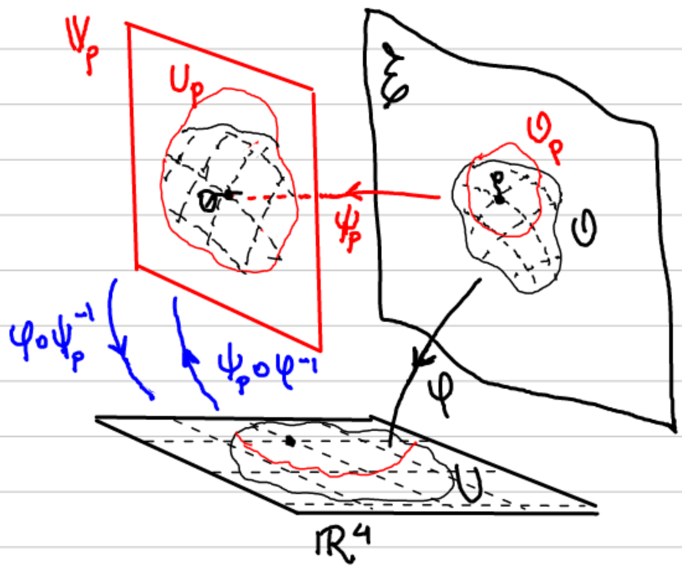
Sistemas de coordenadas e bases coordenadas

Agora que introduzimos uma estrutura em ξ que permite definir suavidade p/ campos vetoriais, vamos introduzir um campo de base de $T\xi := \bigcup_{p\in\xi} \mathbb{V}_p$ que seja suave. Para isso, vamos introduzir o conceito de sistema de coordenadas.

• Coordenadas

→ Sistema de coordenadas: $\varphi : (\mathcal{O} \subseteq \xi) \to (U \subseteq \mathbb{R}^n)$ satisfazendo:

(i) φ é bijetor;
(ii) Para $\forall\ p \in \mathcal{O}$, $\psi_p \circ \varphi^{-1} : \varphi[\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_p] \to \psi_p[\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_p]$ e $\varphi \circ \psi_p^{-1} : \psi_p[\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_p] \to \varphi[\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_p]$ são funções suaves (no sentido já definido anteriormente)

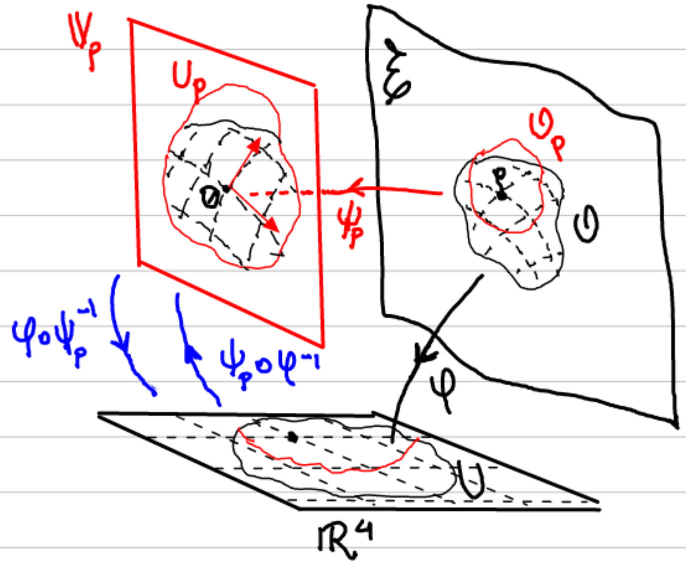


$$\varphi(p) = x^\mu(p) = (x^0(p), x^1(p), \dots, x^{n-1}(p))$$

Base Coordenada

Dado um sistema de coordenadas $\varphi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$, podemos definir, em cada $p \in \mathcal{O}$, um conjunto de vetores $\{\varphi^a_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ por:

$$\varphi^a_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\psi_p \circ \varphi^{-1}(x^\alpha)\right)\Big|_{x^\alpha=\varphi(p)}$$



(ou, na nova notação,

$$\varphi_\mu(f) := \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f\circ\varphi^{-1})(x^\alpha)\Big|_{x^\alpha=\varphi(p)} \quad)$$

Mostre isso!

A conveniência de uma base coordenada é que ela fornece, automaticamente, um campo de base $\{\varphi^a_\mu\}$ que é suave em toda região $\mathcal{O}$ onde φ é definido. Assim adotado um sistema de coordenadas, não precisamos mais nos preocupar com as colagens de W_p.

Exercício: Mostre que sendo φ um sistema de coordenadas e $\{\varphi^a_\mu\}$ a base coordenada associada, tem-se:

$$\varphi_\mu(\varphi_\nu(f)) - \varphi_\nu(\varphi_\mu(f)) \equiv 0 \quad , \forall f \in \mathcal{F}.$$

Solução:

$$\varphi^a_\nu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(f \circ \varphi^{-1})(x^\alpha)\Big|_{x^\alpha = \varphi(\cdot)}$$

$$\varphi_\mu(\varphi_\nu(f)) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}(f\circ\varphi^{-1})(x^\alpha)\Big|_{x^\alpha=\varphi(\varphi^{-1}(x^\beta))}\right)\Bigg|_{x^\beta=\varphi(\cdot)} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(f\circ\varphi^{-1})(x^\alpha)\Big|_{x^\alpha=\varphi(\cdot)}$$

Como $f\circ\varphi^{-1}$ é suave, temos o resultado que queríamos provar.

- **Comutador**

Dados dois campos vetoriais u^a e v^a, define-se o comutador desses campos por:

$$[u,v]^a(f) = u(v(f)) - v(u(f)).$$

Expandindo esses campos em termos de uma base coordenada qualquer, temos:

$$[u,v]^a(f) = u^\mu\varphi_\mu(v^\nu\varphi_\nu(f)) - v^\nu\varphi_\nu(u^\mu\varphi_\mu(f)) =$$

$$= u^\mu\varphi_\mu(v^\nu)\varphi_\nu(f) + \cancel{u^\mu v^\nu \varphi_\mu(\varphi_\nu(f))} - v^\nu\varphi_\nu(u^\mu)\varphi_\mu(f) - \cancel{v^\nu u^\mu \varphi_\nu(\varphi_\mu(f))}$$

$$= \left(u^\nu\varphi_\nu(v^\mu) - v^\nu\varphi_\nu(u^\mu)\right)\varphi_\mu(f) = \left(u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}v^\mu - v^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}u^\mu\right)\Big|_{p=\varphi^{-1}(x^\alpha)}\varphi_\mu(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[u,v]^a = \left(u^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\nu \partial_\nu u^\mu\right)\Big|_{p=\varphi^{-1}(x)} \varphi^a_\mu}$$

Devido à propriedade $\varphi_\mu(f)(p) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(f(p(x^a))\right)$, é comum denotarmos, sugestivamente, elementos da base coordenada por $\partial^a_\mu \equiv \varphi^a_\mu$.