Visualização de vetores e covetores

Estamos habituados a visualizar elementos de $\mathbb{V}$ (que p/ nós será o espaço tangente a cada evento do espaço-tempo) através de "setas" que codificam a direcionalidade e "intensidade" da grandeza vetorial associada. Essa visualização é bem motivada pelo caso mais simples no qual elementos de $\mathbb{V}$ são associados a segmentos orientados num espaço afim. Como visualizar elementos de $\mathbb{V}^*$?

É evidente que um elemento de $\mathbb{V}^*$, sendo este último também um espaço vetorial como $\mathbb{V}$, pode ser visualizado como uma "seta". No entanto, ao usarmos essa visualização, somos forçados a visualizar $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ separadamente (pois lembre que não há um isomorfismo privilegiado entre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ apenas considerando suas estruturas de espaço vetorial.

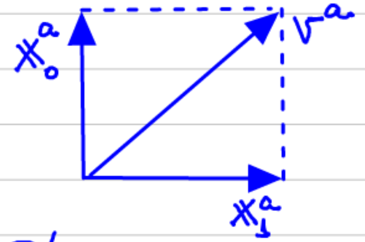
Exercício: Considere $v^a \in \mathbb{V}$ e $\alpha_a \in \mathbb{V}^*$ (consideremos $n=2$, por simplicidade). Suponha que na base $\{x_0^a, x_1^a\}$ (e na base dual associada, $\{\omega_a^0, \omega_a^1\}$) se tenha:

$$v^a = x_0^a + x_1^a$$
$$\alpha_a = \omega_a^0 + \omega_a^1$$

Represente todos os vetores e covetores envolvidos como "setas" num mesmo espaço vetorial. Veja a relação sugerida "visualmente" entre v^a e α_a.

Agora, considere os mesmos v^a e α_a acima, mas adote a base $\{\tilde{x}_0^a, \tilde{x}_1^a\}$ (e a sua dual, $\{\tilde{\omega}_a^0, \tilde{\omega}_a^1\}$) para expressá-los em termos de componentes. Repita o procedimento acima para representar todos os vetores e covetores como "setas" num mesmo espaço e verifique a relação "visual" sugerida entre v^a e α_a.

Solução: Se $v^a = X_0^a + X_1^a$, significa que, representando esses vetores como setas, teríamos, por exemplo:

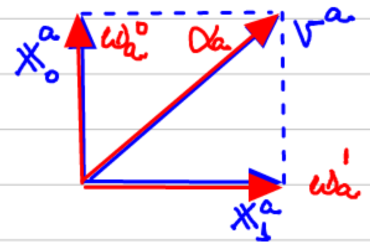


P/ representar α_a nesse mesmo espaço, teríamos que começar sabendo como representar ω_a^0 e ω_a^1. Como, por definição,

$$\omega_a^0 X_0^a = 1 \ , \ \omega_a^0 X_1^a = 0 \ ,$$

$$\omega_a^1 X_0^a = 0 \ , \ \omega_a^1 X_1^a = 1 \ ,$$

poderia parecer razoável usar as mesmas "setas" usadas p/ representar X_0^a e X_1^a, de onde $\alpha_a = \omega_a^0 + \omega_a^1$ seria representado como:



Aparentemente, teríamos que v^a e α_a são "iguais" (representados pela mesma seta).

Agora, mudemos a base de V p/ $\tilde{X}_0 = 2X_0$ e $\tilde{X}_1 = 2X_1$. Desse modo, o mesmo v^a seria dado por

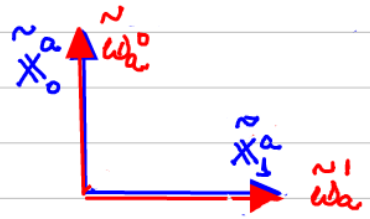
$$v^a = \frac{1}{2}\tilde{X}_0^a + \frac{1}{2}\tilde{X}_1^a$$

A base dual a $\{\tilde{X}_\mu\}_{\mu=1,2}$ continua sendo definida por

$$\tilde{\omega}^0_a \tilde{X}^a_0 = 1 \,, \quad \tilde{\omega}^0_a \tilde{X}^a_1 = 0 \,,$$

$$\tilde{\omega}^1_a \tilde{X}^a_0 = 0 \,, \quad \tilde{\omega}^1_a \tilde{X}^a_1 = 1 \,,$$

o que segue que se tivéssemos começado com essas bases, não teríamos porque não representar a relação entre elas de forma análoga à anteriormente:



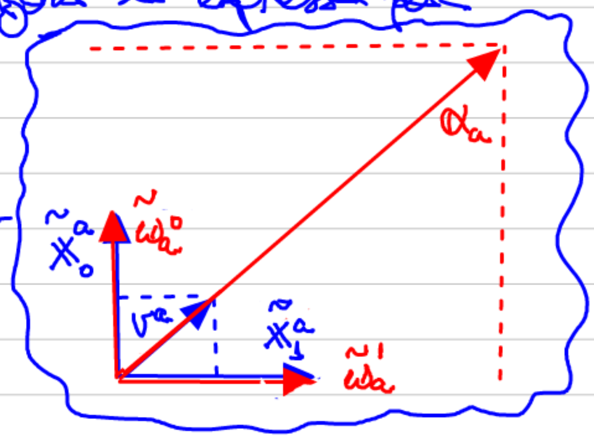
No entanto, pela relação entre $\tilde{X}_\mu$ e X_μ, obtém-se que:

$$\tilde{\omega}^0_a = \frac{1}{2}\omega^0_a \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}^1_a = \frac{1}{2}\omega^1_a \,,$$

de modo que o mesmo α_a agora se expressa por

$$\alpha_a = 2\tilde{\omega}^0_a + 2\tilde{\omega}^1_a$$

Logo, a nova visualização ficaria

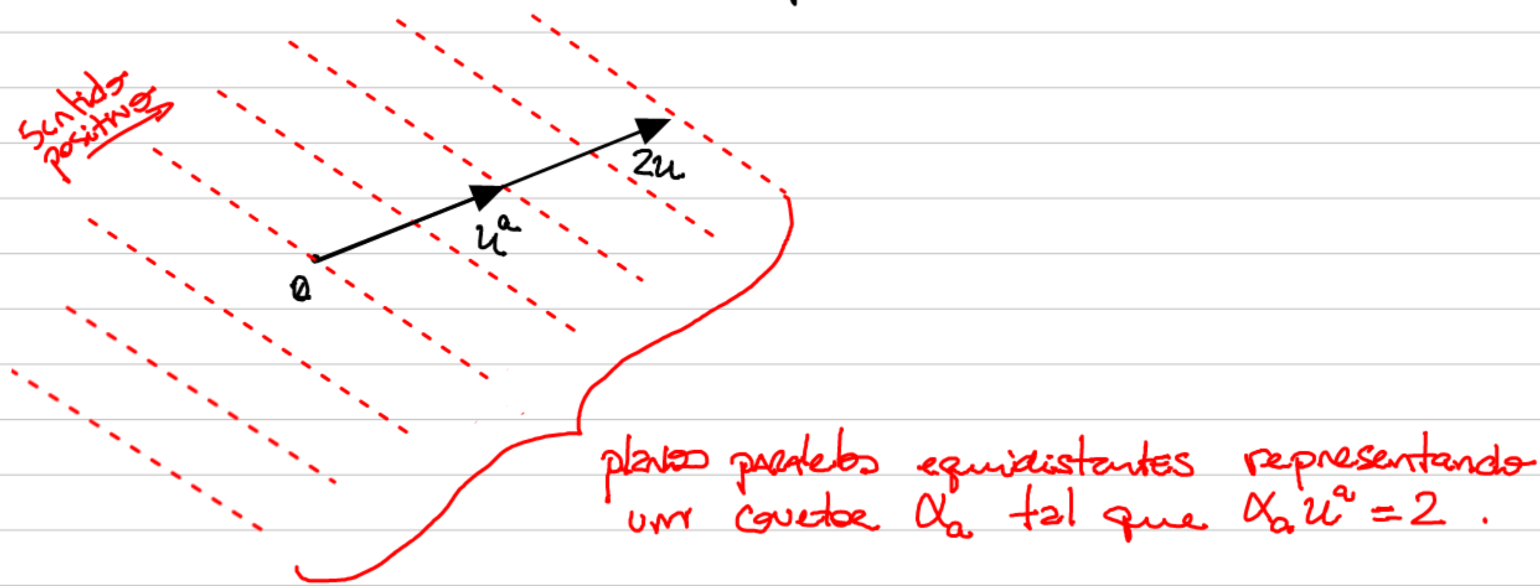


,

onde v^a e α_a não são mais representados pela mesma "seta".

O exercício acima ilustra que representar elementos de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ por "setas" num mesmo espaço é potencialmente confuso (a menos que se privilegia uma identificação — ou seja, isomorfismo — entre esses espaços). Gostaríamos de visualizar elementos de $\mathbb{V}$ e de $\mathbb{V}^*$ concomitantemente e de uma maneira que independesse de escolha de base.

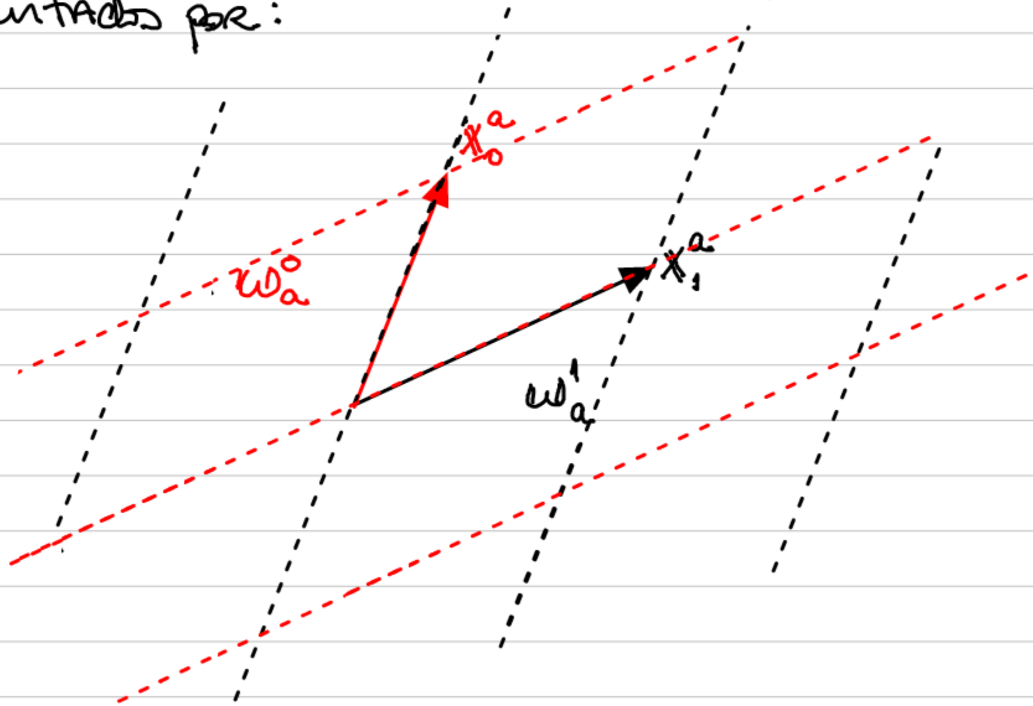
A solução para nosso desejo vem de se lembrar que covetores são funcionais lineares sobre vetores, e o resultado de $\alpha(u) = \alpha_a u^a$ independe da base na qual u^a e α_a são expressos. Dado um vetor u^a, representado por uma "seta" com certa orientação e "tamanho", o "número" de "planos" paralelos entre si, equidistantes, que essa seta atravessa é uma função linear em u^a:



Assim, dado uma base de V, $\{x^a_\mu\}$, podemos determinar um covetor qualquer pelo número de planos, que o covetor representa, que são "perfurados" pelos vetores x^a_μ:

$$\alpha_\mu = \alpha_a x^a_\mu$$

Em particular, dada uma base $\{x^a_0, x^a_1\}$, os covetores da base dual $\{\omega^0_a, \omega^1_a\}$ são representados por:



(Obs: A representação de covetores pode ser interpretada como "curvas de nível" de uma função linear: quanto "maior" o covetor, mais rápido a função variaria e, portanto, menos espaçadas seriam as curvas de nível associadas.)

Exercício: Refaça o exercício anterior e mostre que a representação dos mesmos v^a e α_a de fato independem da base utilizada.