• **Tensores:** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial (de dimensão n) e $\mathbb{V}^*$ seu dual. Um tensor de posto (k,l) (com $k,l \in \mathbb{N}$) é um mapeamento multilinear de $\underbrace{\mathbb{V}^* \times \ldots \times \mathbb{V}^*}_{k} \times \underbrace{\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}}_{l}$ em $\mathbb{R}$. O conjunto desses mapeamentos será denotado por $\mathcal{T}(k,l)$, que possui estrutura natural de espaço-vetorial (p/ cada valor de k,l fixos).

Obs.: Note que $\mathcal{T}(0,1) \cong \mathbb{V}^*$ e $\mathcal{T}(1,0) \cong (\mathbb{V}^*)^* \cong \mathbb{V}$.

Base de $\mathcal{T}(k,l)$: Seja $\{x_\mu\}_{\mu=0,\ldots,n-1}$ uma base de $\mathbb{V}$ e $\{\omega^\mu\}_{\mu=0,\ldots,n-1}$ a base dual associada de $\mathbb{V}^*$. Definamos elementos de $\mathcal{T}(k,l)$ por

$$(x_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes x_{\mu_k} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{\nu_l})(\underbrace{\overset{\in \mathbb{V}^*}{\alpha}, \ldots, \overset{\in \mathbb{V}^*}{\beta}}_{k}, \underbrace{\overset{\in \mathbb{V}}{u}, \ldots, \overset{\in \mathbb{V}}{v}}_{l}) := \alpha(x_{\mu_1}) \ldots \beta(x_{\mu_k})\, \omega^{\nu_1}(u) \ldots \omega^{\nu_l}(v)$$

Esses elementos, $\{x_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes x_{\mu_k} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{\nu_l}\}_{\substack{\mu_i = 0,\ldots,k \\ \nu_i = 0,\ldots,l}}$, compõem uma base de $\mathcal{T}(k,l)$.
(Note, portanto, que a dimensão de $\mathcal{T}(k,l)$ é $n^{(k+l)}$.)

Componentes: Seja $T \in \mathcal{T}(k,l)$. Logo,

$$T = \sum_{\mu_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{\mu_k=0}^{n-1} \sum_{\nu_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{\nu_l=0}^{n-1} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l}\, x_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes x_{\mu_k} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{\nu_l},$$

onde $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell}$ são as componentes de $\mathbb{T}$ na base de $\mathcal{T}(k,\ell)$ construída a partir de $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$.

Exercício: Mostre que as componentes de um tensor $\mathbb{T} \in \mathcal{T}(k,\ell)$ na base associada a $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ (base de $\mathbb{V}$) são dadas por

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_\ell} = \mathbb{T}(\omega^{\mu_1}, \dots, \omega^{\mu_k}, x_{\nu_1}, \dots, x_{\nu_\ell}),$$

onde $\{\omega^\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ é a base dual de $\mathbb{V}^*$.

Exemplo: A métrica $g: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ é um exemplo de tensor (simétrico) de posto $(0,2)$: $g \in \mathcal{T}(0,2)$. Dada uma base $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ de $\mathbb{V}$,

$$g = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} g_{\mu\nu}\, \omega^\mu \otimes \omega^\nu,$$

onde $\{\omega^\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ é a base dual de $\mathbb{V}^*$ e $g_{\mu\nu} := g(x_\mu, x_\nu)$.