- **Notação de índices abstratos e convenção de Einstein**

- Precisamos de índices que tomam valores em $\{0, 1, \dots, n-1\}$ para identificar as componentes de tensores. Esses são os chamados "índices concretos". Usaremos letras gregas minúsculas p/ representá-los;

Exemplo: $T^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$ representam as componentes $(T^{00}_{000}, T^{20}_{001}, T^{12}_{100}, \dots)$ do tensor

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=0}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\sigma=0}^{n-1} T^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}\, X_\alpha \otimes X_\beta \otimes \omega^\mu \otimes \omega^\nu \otimes \omega^\sigma \in \mathcal{T}(2,3)$$

- Usaremos "índices abstratos" — que não assumem nenhum valor numérico — junto às letras que denotam os objetos tensoriais, fazendo parte da notação deste objeto, posicionados da mesma maneira que os índices concretos aparecem em suas componentes. O objetivo é deixar claro o posto do tensor, já através de sua notação. Usaremos letras latinas minúsculas de "a" a "h" p/ índices abstratos

Exemplo: O tensor $\mathbf{T}$ do exemplo anterior passa a ser denotado por T^{ab}_{cde}, deixando claro que é um elemento de $\mathcal{T}(2,3)$ pela quantidade e posição dos índices. A eq. acima fica, portanto:

$$\underbrace{T^{ab}_{cde}}_{\in \mathcal{T}(2,3)} = \sum_{\alpha=0}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\sigma=0}^{n-1} \underbrace{T^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(X_\alpha)^a (X_\beta)^b}_{\in \mathcal{T}(1,0) \doteq V} \underbrace{(\omega^\mu)_c (\omega^\nu)_d (\omega^\sigma)_e}_{\in \mathcal{T}(0,1) = V^*}$$

Atenção: os índices concretos que aparecem nos elementos da base servem p/ identificá-los e não representam suas "componentes"

– Por fim, usaremos a convenção de omitir os símbolos de somatória sempre que o índice somado estiver repetido, um subscrito e outro sobrescrito. Assim, a expressão acima fica:

$$T^{ab}{}_{cde} = T^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu\sigma} (X_\alpha)^a (X_\beta)^b (\omega^\mu)_c (\omega^\nu)_d (\omega^\sigma)_e$$

Exemplo: A partir de agora, a métrica será representada por $g_{ab} \in \mathcal{T}(0,2)$, com $g_{ab} = g_{ba}$ (simetria). Suas componentes são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = g_{ab} (X_\mu)^a (X_\nu)^b$$

(ou seja, $g_{ab} = g_{\mu\nu} (\omega^\mu)_a (\omega^\nu)_b$)

(Obs.: Note que índices repetidos — concretos ou abstratos — são "mudos", no sentido que a letra usada p/ representá-lo é irrelevante. Por exemplo,

$$g_{ab} u^b = g_{\mu\nu} (\omega^\mu)_a (\omega^\nu)_b u^\alpha (X_\alpha)^b = g_{\mu\nu} u^\alpha (\omega^\mu)_a \underbrace{(\omega^\nu)_b (X_\alpha)^b}_{\delta^\nu_\alpha} = (g_{\mu\nu} u^\nu) (\omega^\mu)_a$$

Se desenvolvermos $g_{ac} u^c$, chegaremos exatamente ao mesmo resultado: $g_{ab} u^b = g_{ac} u^c$. Note que $g_{ab} u^b$ é um elemento de $V^* = \mathcal{T}(0,1)$. Logo, o índice repetido não deve ser contado p/ se identificar o posto do tensor obtido.)