

■ Revisão: Álgebra Linear, TENSORES e Notação

• Espaço dual: Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Seja V^* o conjunto de funcionais lineares sobre V : $V^* \ni \alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(u + \lambda v) = \alpha(u) + \lambda \alpha(v)$, $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

→ V^* tem estrutura natural de espaço vetorial:

$$(i) \alpha, \beta \in V^* \Rightarrow (\alpha + \lambda \beta)(u) := \alpha(u) + \lambda \beta(u), \forall u \in V, \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \mathcal{O} \in V^*, \mathcal{O}(u) := 0, \forall u \in V.$$

→ Base dual: seja $\{x_\mu\}_{\mu=0, \dots, n-1}$ uma base de V . Considere os n elementos $\omega^\mu \in V^*$ definidos por

$$\omega^\mu(x_\nu) := \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

(estendidos por linearidade para o restante de V). O conjunto $\{\omega^\mu\}_{\mu=0, \dots, n-1}$ é uma base de V^* (chamada base dual a $\{x_\mu\}_{\mu=0, \dots, n-1}$).

Dem.: (I) $\{\omega^\mu\}_{\mu=0, \dots, n-1}$ é l.i.

$$\lambda_0 \omega^0 + \lambda_1 \omega^1 + \dots + \lambda_{n-1} \omega^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \omega^0(u) + \dots + \lambda_{n-1} \omega^{n-1}(u) = 0, \forall u \in V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 u^0 + \lambda_1 u^1 + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = 0, \forall (u^0, u^1, \dots, u^{n-1}) \in \mathbb{R}^n \text{ (onde } u^\mu := \omega^\mu(u))$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

(II) $\{\omega^\mu, \alpha\}_{\mu=0, \dots, n-1}$ é l.d. qualquer $\alpha \in V^*$.

$$\bar{\lambda} \neq 0, \quad \bar{\lambda} \alpha + \lambda_0 \omega^0 + \dots + \lambda_{n-1} \omega^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda} \alpha(u) + \lambda_0 \omega^0(u) + \dots + \lambda_{n-1} \omega^{n-1}(u) = 0, \forall u \in V$$

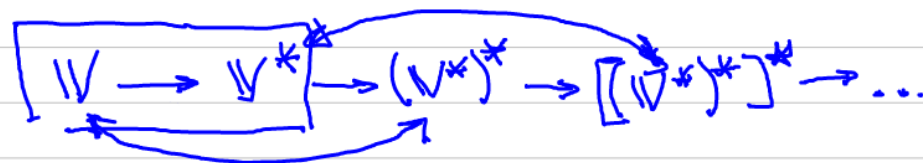
$$\Leftrightarrow (\bar{\lambda} \alpha(x_0) + \lambda_0) u^0 + \dots + (\bar{\lambda} \alpha(x_{n-1}) + \lambda_{n-1}) u^{n-1} = 0, \forall (u^0, \dots, u^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\mu = -\bar{\lambda} \alpha(x_\mu) \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

Ou seja, V^* também tem dimensão n .

(Obs: No contexto relativístico, V é o espaço tangente (em cada evento) e V^* é chamado espaço cotangente. Elementos de V são chamados quadri-vetores, ou 4-vetores, e elementos de V^* são chamados de covetores.)

Cadeia de duais



isomorfismo
canônico

$$\alpha(u) \in \mathbb{R}$$

$$V \ni u \leftrightarrow U \in V^{**} \quad U(\alpha) = \alpha(u) \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

$$U(\alpha) := \alpha(u_0), \quad u_0 \in W \text{ fixo}, \quad \alpha \in W^*$$

$$\boxed{U(\alpha + \lambda\beta) := (\alpha + \lambda\beta)(u_0) = \alpha(u_0) + \lambda\beta(u_0) = U(\alpha) + \lambda U(\beta)} \quad \boxed{}$$