Revisão: Álgebra Linear, tensores e notação

- **Espaço dual:** Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão n. Seja $\mathbb{V}^*$ o conjunto de funcionais lineares sobre $\mathbb{V}$: $\mathbb{V}^* \ni \alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $\alpha(u + \lambda v) = \alpha(u) + \lambda\alpha(v)$, $u, v \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{R}$.

→ $\mathbb{V}^*$ tem estrutura natural de espaço vetorial:

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{V}^* \Rightarrow (\alpha + \lambda\beta)(u) := \alpha(u) + \lambda\beta(u)$, $\forall u \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $\emptyset \in \mathbb{V}^*$, $\emptyset(u) := 0$, $\forall u \in \mathbb{V}$.

→ Base dual: seja $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ uma base de $\mathbb{V}$. Considere os n elementos $\omega^\mu \in \mathbb{V}^*$ definidos por

$$\omega^\mu(x_\nu) := \delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

(estendidos por linearidade para o restante de $\mathbb{V}$). O conjunto $\{\omega^\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ é uma base de $\mathbb{V}^*$ (chamada base dual a $\{x_\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$).

Dem.: (I) $\{\omega^\mu\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ é L.I.

$$\lambda_0\omega^0 + \lambda_1\omega^1 + \dots + \lambda_{n-1}\omega^{n-1} = \emptyset \Leftrightarrow \lambda_0\omega^0(u) + \dots + \lambda_{n-1}\omega^{n-1}(u) = 0, \ \forall u \in \mathbb{V} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 u^0 + \lambda_1 u^1 + \dots + \lambda_{n-1}u^{n-1} = 0, \ \forall (u^0, u^1, \dots, u^{n-1}) \in \mathbb{R}^n \ (\text{onde } u^\mu := \omega^\mu(u))$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

(II) $\{\omega^\mu, \alpha\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ é L.D., qualquer $\alpha \in V^*$.

$\bar\lambda \neq 0$, $\bar\lambda\alpha + \lambda_0\omega^0 + \dots + \lambda_{n-1}\omega^{n-1} = \emptyset \iff \bar\lambda\alpha(u) + \lambda_0\omega^0(u) + \dots + \lambda_{n-1}\omega^{n-1}(u) = 0, \forall u \in V$

$$\iff (\bar\lambda\alpha(x_0) + \lambda_0)u^0 + \dots + (\bar\lambda\alpha(x_{n-1}) + \lambda_{n-1})u^{n-1} = 0, \ \forall (u^0, \dots, u^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\iff \lambda_\mu = -\bar\lambda\,\alpha(x_\mu) \overset{\alpha \neq \emptyset}{\iff} (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \emptyset \in \mathbb{R}^n$$

Ou seja, V^* também tem dimensão n.

(Obs.: No contexto relativístico, V é o espaço tangente (em cada evento) e V^* é chamado espaço cotangente. Elementos de V são chamados quadri-vetores, ou 4-vetores, e elementos de V^* são chamados de covetores.)

Cadeia de duais

$$\boxed{V \to V^*} \to (V^*)^* \to [(V^*)^*]^* \to \dots$$

isomorfismo canônico

$\boxed{\alpha(u)} \in \mathbb{R}$

$V \ni u \leftrightarrow U \in V^{**}$ $\quad U(\alpha) = \alpha(u) \in \mathbb{R}$

Exemplo:

$$\overset{\in (V^*)^*}{\mathbb{U}}\,(\overset{\in V^*}{\alpha}) := \alpha(u_0) \quad , u_0 \in V \text{ fixo}, \quad \alpha \in V^*$$

$$\boxed{\mathbb{U}(\alpha + \lambda\beta) := (\alpha + \lambda\beta)(u_0) = \alpha(u_0) + \lambda\beta(u_0) = \mathbb{U}(\alpha) + \lambda\mathbb{U}(\beta)}$$