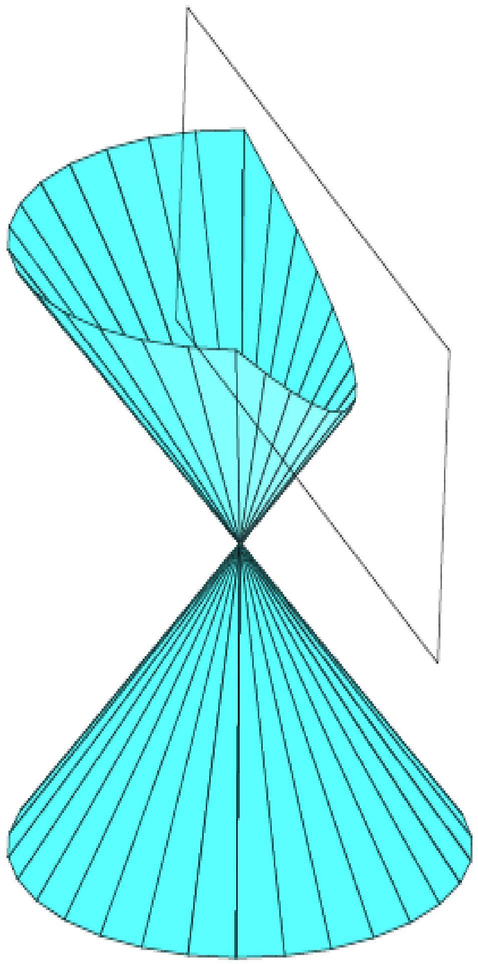
Parábola

Definição:

A parábola (do grego *παραβολή)* é uma seção cônica gerada pela intersecção de uma superfície cônica de segundo grau e um plano que é paralelo a linha geratriz (que gera) do cone.



Parábola

Definição como lugar geométrico:

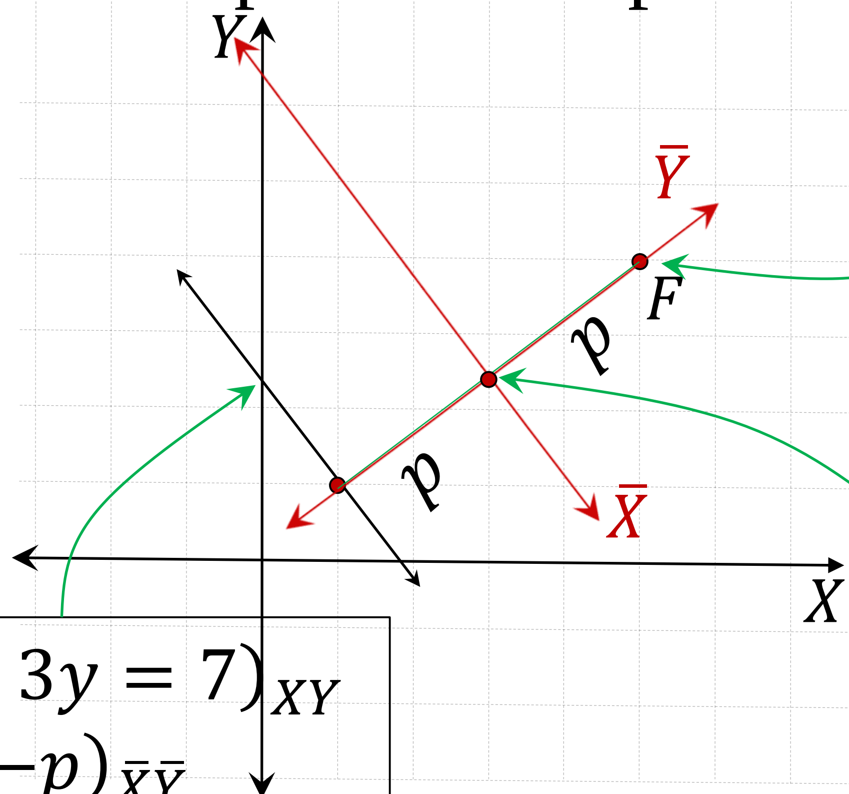
Uma **parábola** é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano, equidistantes de uma reta $\mathcal{L}$ (**diretriz**) e de um ponto fixo F (**foco**), não pertencente a $\mathcal{L}$, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, tais que:

$$\mathcal{P} = \{P = (x, y) \ / \ d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}$$

$$\mathcal{P}: \ d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$$

Parábola

Dado um ponto fixo, chamado de foco F, e uma reta diretriz $\mathcal{L}$, $[d(F,\mathcal{L}) = 2p]$, vamos utilizar novos eixos para simplificar a representação:



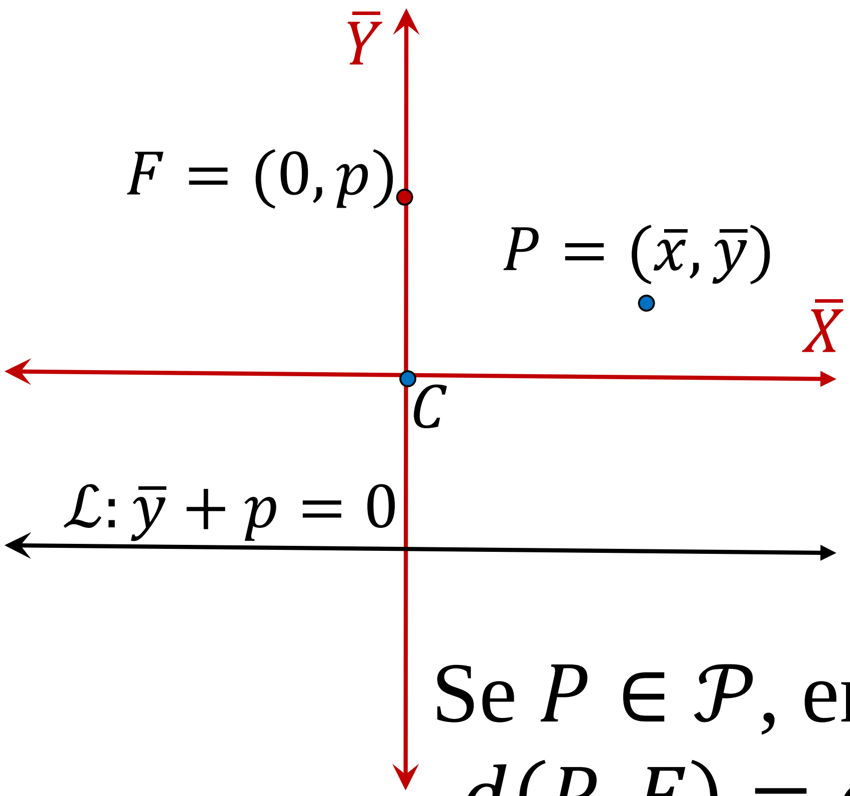
$$F = (5,4)_{XY}$$
$$F = (0,p)_{\bar{X}\bar{Y}}$$
$$F = \left(0,\tfrac{5}{2}\right)_{\bar{X}\bar{Y}}$$

$$C = \left(3,\tfrac{5}{2}\right)_{XY}$$
$$C = (0,0)_{\bar{X}\bar{Y}}$$

$$(\mathcal{L}: 4x + 3y = 7)_{XY}$$
$$(\mathcal{L}: \bar{y} = -p)_{\bar{X}\bar{Y}}$$

Parábola

Agora, trabalhando nos novos eixos $\bar{X}\bar{Y}$, temos



Supondo que o ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ pertence a parábola $\mathcal{P}$, então deve ser válida a equação dada:

Se $P \in \mathcal{P}$, então

$$d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$$

Parábola : Equação canônica

$$\mathcal{P}:\ \ d(P,F) = d(P,\mathcal{L})$$

$$\mathcal{P}: d\big((\bar{x},\bar{y}),(0,p)\big) = |\bar{y}+p|$$

$$\mathcal{P}:\ \ \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y}-p)^2} = |\bar{y}+p|$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$\mathcal{P}:\ \ \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{y}p + p^2 = \bar{y}^2 + 2\bar{y}p + p^2$$

$$\mathcal{P}:\ \ \bar{x}^2 = 4\bar{y}p$$

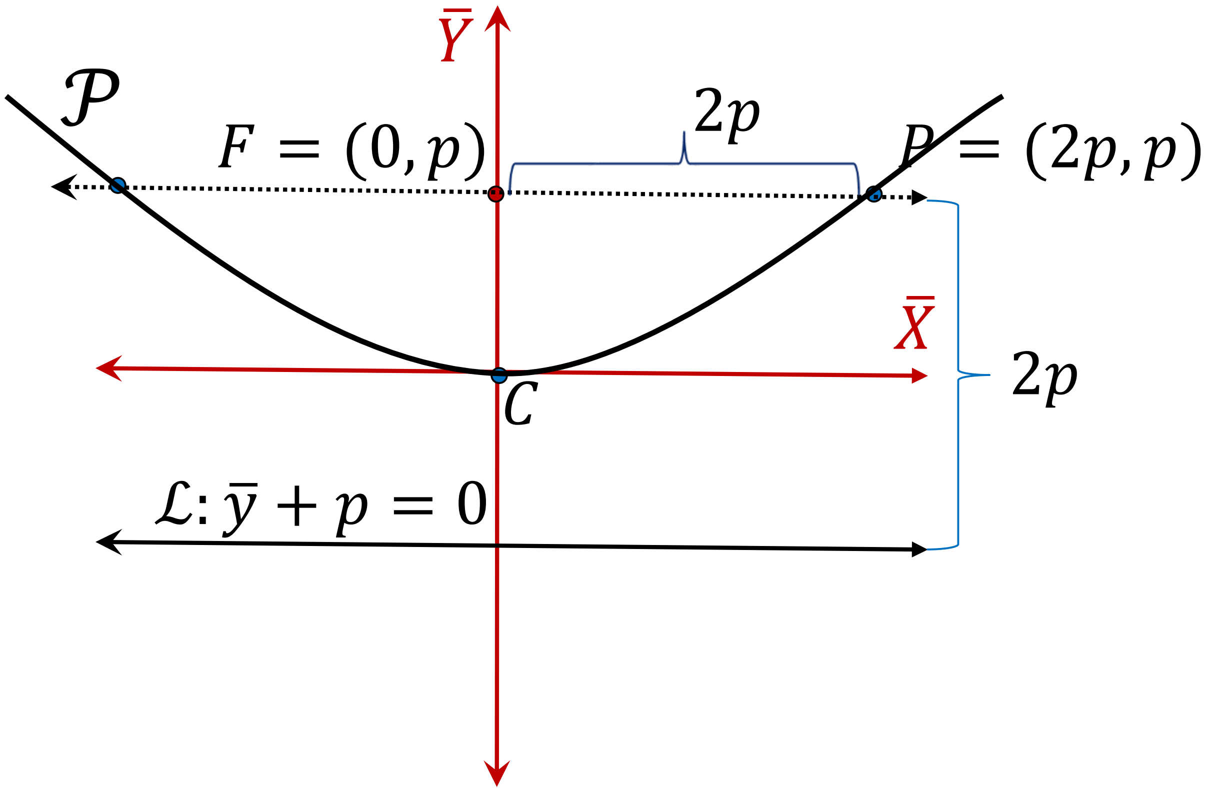
é chamada de **equação canônica da parábola**.

Observar:

- O eixo $\bar{X}$ é paralelo a reta diretriz $\mathcal{L}$.
- O eixo $\bar{Y}$ passa pelo foco F.

Parábola

No desenho:



$$\mathcal{P}: \; \bar{x}^2 = 4\bar{y}p$$

Observar: $C \in \mathcal{P}$ também

$$(2p, p) \in \mathcal{P}$$

$$(-2p, p) \in \mathcal{P}$$

Com isso pode ser desenhada a parábola.

Temos o "quan aberta" é $\mathcal{P}$.

Elementos da parábola

F: foco, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ ***:*** reta diretriz

V: vértice

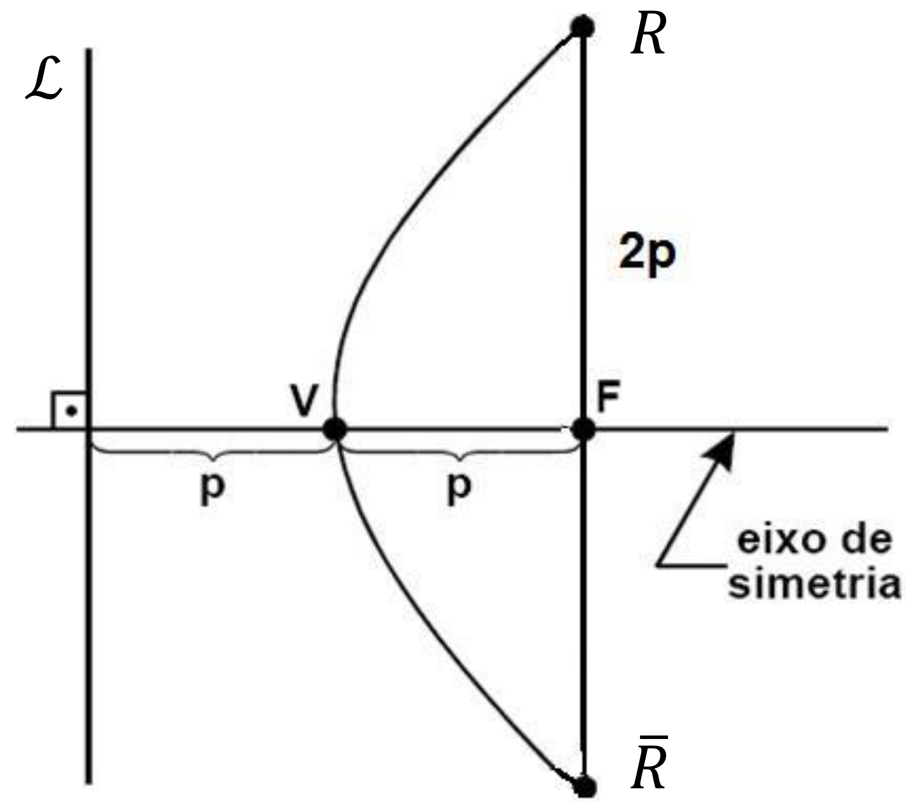
p: parâmetro, que representa a distância do foco ao vértice.

eixo de simetria: reta que

passa pelo foco, ortogonal a $\mathcal{L}$.

Lado reto*:* é a corda $R\bar{R}$ que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria. Também chamada de corda focal mínima.

O seu comprimento é 4**p**.



Parábola : Equação do exemplo

$F = (5,4)$, $\mathcal{L}: 4x + 3y - 7 = 0$

$d(F,\mathcal{L}) = \frac{|4(5)+3(4)-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 5 = 2p$

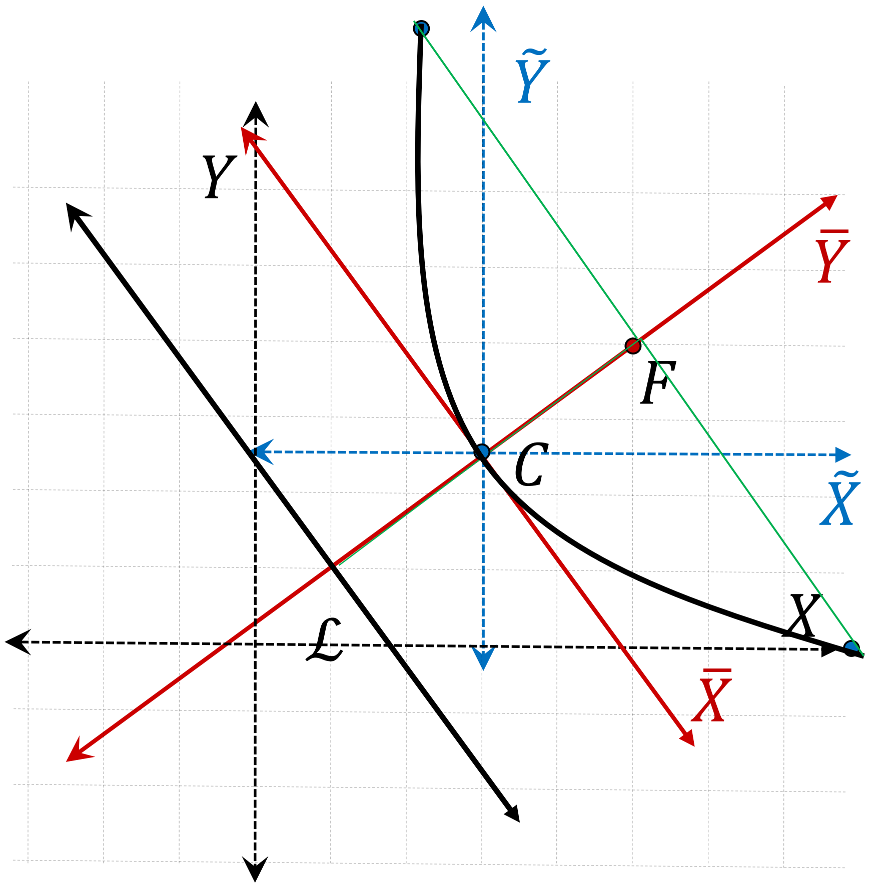
Em $\bar{X}\bar{Y}$: $\mathcal{P}$: $\bar{x}^2 = 4\bar{y}p$

então $\mathcal{P}$: $\bar{x}^2 = 10\bar{y}$

Identificando a rotação:

Vetor de direção do eixo focal $\bar{Y}$ é $v = (4,3)$ ou $v_u = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Mas precisamos para $\bar{X}$, isto é, $-v_u^{\perp} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$



Rotação: $\begin{cases} \bar{x} = \frac{3}{5}\tilde{x} - \frac{4}{5}\tilde{y} \\ \bar{y} = \frac{4}{5}\tilde{x} + \frac{3}{5}\tilde{y} \end{cases}$

Parábola : Equação do exemplo

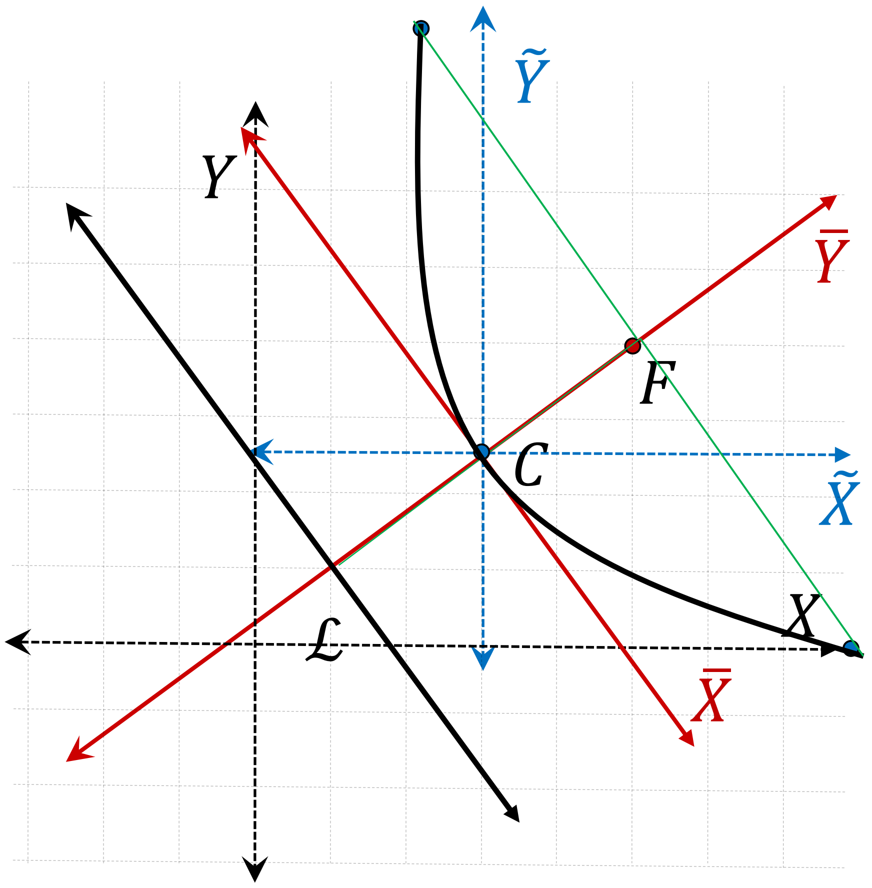
$F = (5,4), \mathcal{L}: 4x + 3y = 7$

Então, em $\bar{X}\bar{Y}$:

$$\mathcal{P}:\ \bar{x}^2 = 10\bar{y}$$

Pela rotação:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{3}{5}\tilde{x} - \frac{4}{5}\tilde{y} \\ \bar{y} = \frac{4}{5}\tilde{x} + \frac{3}{5}\tilde{y} \end{cases}$$



temos em $\tilde{X}\tilde{Y}$:

$$\mathcal{P}:\ 9\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\tilde{y} + 16\tilde{y}^2 - 200\tilde{x} - 150\tilde{y} = 0$$

Parábola : Equação do exemplo

Dados do exemplo: $F_1 = (1,1)$, $F_2 = (5,4)$, $2a = 3$

Em $\bar{X}\bar{Y}$: $\boldsymbol{\mathcal{P}}$: $\boldsymbol{\bar{x}^2 = 10\bar{y}}$

Pela rotação utilizada

Em $\tilde{X}\tilde{Y}$: $\boldsymbol{\mathcal{P}}$: $\boldsymbol{9\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\tilde{y} + 16\tilde{y}^2 - 200\tilde{x} - 150\tilde{y} = 0}$

E utilizando a translação:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 3 \\ \tilde{y} = y - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Em XY:

$\boldsymbol{\mathcal{P}}$: $\boldsymbol{9x^2 - 24xy + 16y^2 - 194x - 158y + 976 = 0}$

Parábola

Muitas vezes o que é fornecido é a equação:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 194x - 158y + 976 = 0$$

Nesse caso, para identificar a parábola que temos visto antes, precisamos:

- diagonalizar - identifica a rotação necessária
- completar quadrados - identifica a translação necessária.

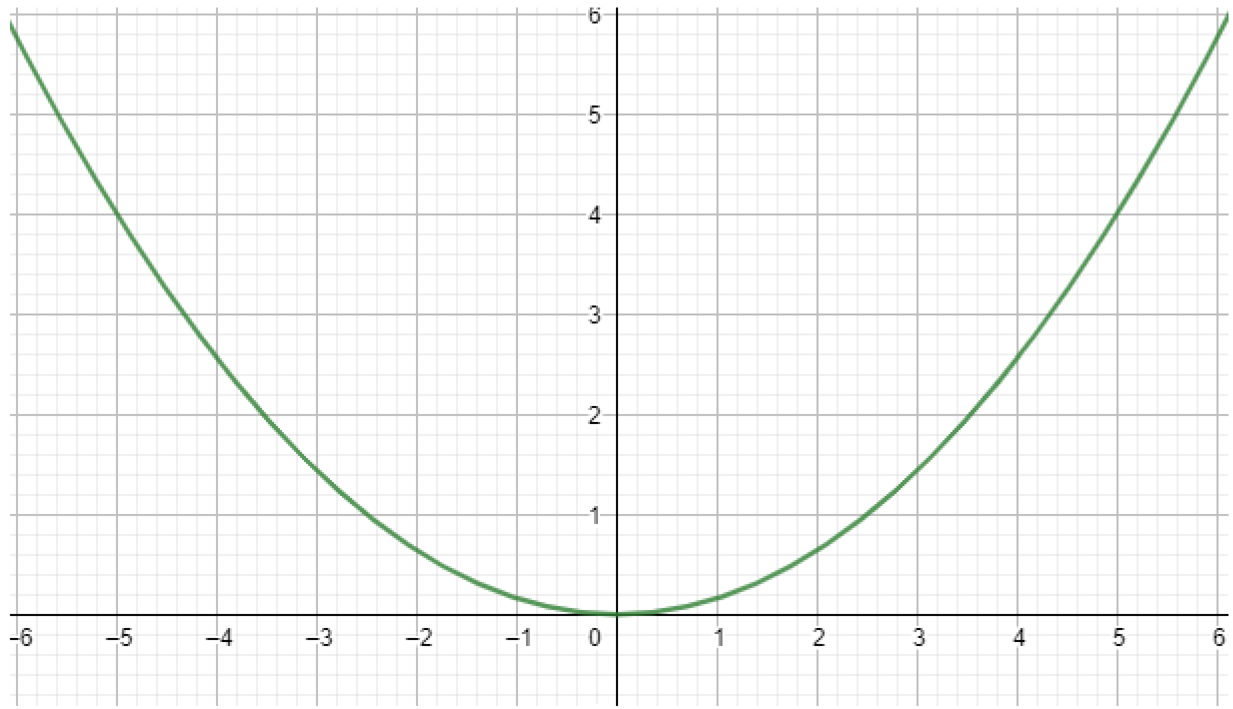
Sempre será possível chegar na equação

$$\bar{x}^2 = 10\bar{y}$$

Parábola

Faça os cálculos necessários. Por exemplo, seja

$$4x^2 = 25y$$



então

$$x^2 = \frac{25}{4}y$$

$$p = \frac{25}{16}$$

Assim, identifica os pontos do lado reto: $\left(-\frac{25}{8}, \frac{25}{16}\right)$ e $\left(\frac{25}{8}, \frac{25}{16}\right)$

o foco $F = (0, \frac{25}{16})$. O vértice é a origem.

Parábola

Faça os cálculos necessários. Por exemplo, seja

$$4y^2 = 25x$$

então

$$y^2 = \frac{25}{4}x$$

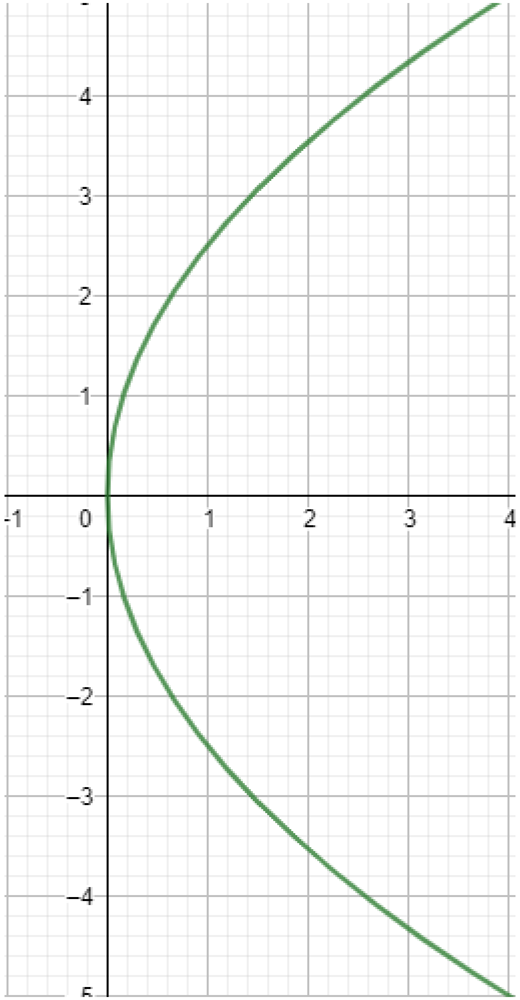
$$p = \frac{25}{16}$$

Assim, identifica o foco $F = \left(\frac{25}{16}, 0\right)$,

os pontos do lado reto:

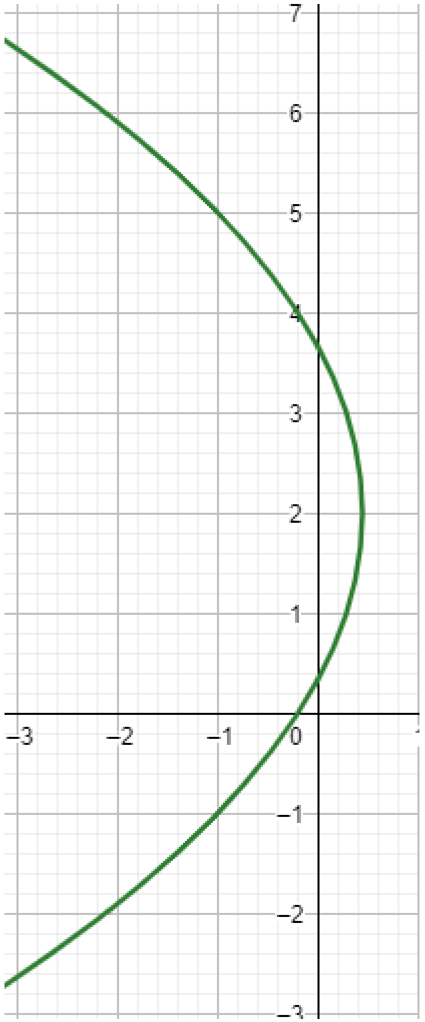
$\left(\frac{25}{16}, -\frac{25}{8}\right)$ e $\left(\frac{25}{16}, \frac{25}{8}\right)$.

O vértice é a origem.



Parábola

Quando não temos termos mistos, basta completar quadrados: $-4y^2 - 25x + 16y = 5$



Então procure o vértice ao completar quadrados.

Determine p, $2p$ e o foco.

Determine o lado reto e sua medida e os pontos extremos nesse lado reto.

Observe que o vértice dessa parábola não é a origem, e está no lado negativo

Parábola - Aplicações

A secção de um farol de automóvel tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.

Se um espelho parabólico é apontado para o Sol, os raios da luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome foco (em latim focus significa fogo).

Aplica-se o mesmo princípio na construção de espelhos para telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas (as onda paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).

Parábola - Aplicações

O cabo principal de uma ponte pênsil assumiria a forma de uma parábola (desde que o cabo fosse perfeitamente flexível), se negligenciasse a sua massa e se o peso da ponte estivesse uniformemente distribuídos ao longo de seu comprimento. Na prática, sabemos que tais condições não se verificam. Na verdade os cabos assumem a forma de uma curva muito próxima de uma parábola.

Tal curva sujeita apenas ao próprio peso se chama **Catenária**.

Em Resistência dos Materiais, o diagrama do Momento Fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme é uma parábola.

Em balística, quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, a trajetória é uma parábola.

Seja um recipiente cilíndrico parcialmente cheio de um certo líquido. Aplicando-se o movimento de rotação no eixo do cilindro, a secção (ou seção) da superfície é uma parábola.

Exercícios de parábola

1. O lado reto de uma parábola mede 8 u. Seu foco é (0,3) e seu eixo coincide com o eixo Y. Determine a parábola.
2. Um ponto de uma parábola é $(-5,4)$ e seu vértice é $(2,-1)$, se seu eixo é paralelo ao eixo Y determine a equação da parábola.
3. Determine os elementos da parábola que passa pelos pontos (7,8) e $(2,-2)$ e a sua diretriz é a reta
$$x = -3.$$