Álgebra Linear
Matrizes

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

Qual sua ideia de Trabalho?

Trabalho como castigo.
substitua pelo conceito:
"realizar uma obra".

Mundo greco-romano: Dono – escravo
Idade média: Senhor – Servo

Trabalhar cansa mas não precisa gerar estresse.
You will be happy ...

Matrizes – Sistemas Lineares

- *Definição:* Uma matriz **A** é um arranjo de m linhas e n colunas de mxn elementos (números).
  - Representa-se por A_{mxn}.
  - a_{ij} representa o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrizes especiais

1. Identidade: I_{nxn}

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Nula:

$$0_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Diagonal

$$D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

4. Matriz linha e coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2.7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3.22 & 1.6 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriz triangular superior e inferior

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1.6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.7 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

- Transposta de uma matriz
- Igualdade de matrizes
- Soma de matrizes
- Multiplicação de matriz com escalar
- Multiplicação de matrizes
- Multiplicação de matriz linha e matriz coluna. Produto escalar
- Inversa de uma matriz
- Determinante de uma matriz (*)

Transposta

- Transposta de uma matriz. Se $A_{mxn} = [a_{ij}]$ então a transposta de A é $A^t_{nxm} = [a_{ji}]$, i=1:m j=1:n

$$A_{3x2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & N \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow A^t_{2x3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Observar: $A_{3x2} \; A^t_{2x3} = M_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 17 \end{bmatrix}$

$$A^t_{2x3} \; A_{3x2} = N_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Algumas propriedades importantes

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- Chama-se **matriz simétrica**, se $A^t = A$

Matriz inversa: $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Qual a inversa: $D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$ $\quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/14 \end{bmatrix}$

Multiplicação de matrizes como sistema linear de equações

Multiplique as matrizes:

$$A_{3x3}\,X_{3x1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 17 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5x+3y+9z \\ 3x+2y+5z \\ 9x+5y+17z \end{bmatrix}}_{AX}$$

Expresse em matrizes:

$$\begin{aligned} 2y + x + 3w &= \mathbf{1900} \\ v + 3y + 5z &= \mathbf{2400} \\ 3x + 2y + 4z &= \mathbf{2900} \\ 2x+3y-7z &= \mathbf{1200} \end{aligned}$$

Sistemas de equações como matrizes

- Observar os sistemas e relacione com matrizes:
  - Uma indústria produz três produtos X, Y e Z, usando dois tipos de insumo A e B.
    - Para a manufatura de cada kg do produto X são usados 3 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B.
    - Para cada kg de Y, utiliza 1 grama de insumo A e 1 grama de B.
    - Para cada kg de Z, utiliza-se 1 grama de A e 4 gramas de B.

Represente em formato matricial e determine quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de *x* kg de X, *y* kg de Y e *z* de Z.

Resolução

- O sistema de equações será:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow \\ B \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X & Y & Z \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Se: $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ então

$$M\,V = \begin{bmatrix} 3x+y+z \\ 2x+y+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Total de gramas da componente A utilizado} \\ \text{Total de gramas da componente B utilizado} \end{bmatrix}$$

Cuidado

As unidades das magnitudes utilizadas em uma matriz, devem ser compatíveis.

Observe o próximo exemplo e verifique a solução utilizando os valores fornecidos diretamente, e posteriormente, utilize uma única unidade para cada grandeza.

Exercício

Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.

O sistema resultante é ?

Formando uma equação matricial com as informações temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.9} \\ \mathbf{2.4} \\ \mathbf{2900.00} \end{bmatrix}$$

Solução: $V = \begin{bmatrix} 1931.9 \\ 3380.25 \\ -2414.05 \end{bmatrix}$

que obviamente é uma solução não física, (produzir -2414.05 kg do produto Z?).

Resolução

- Sistema de equações completo para o problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1900} \\ \mathbf{2400} \\ \mathbf{2900.00} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = \mathbf{1900} \\ x + 3y + 5z = \mathbf{2400} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{2900} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = \mathbf{2400} \\ 2x + y + 3z = \mathbf{1900} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{2900} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 6y - 10z = \mathbf{-4800} \\ 2x + y + 3z = \mathbf{1900} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{2900} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 6y - 10z = \mathbf{-4800} \\ 0x - 5y - 7z = \mathbf{-2900} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{2900} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = \mathbf{2400} \\ 0x + 5y + 7z = \mathbf{2900} \\ 3x + 2y + 4z = \mathbf{2900} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = \mathbf{2400} \\ 0x + 5y + 7z = \mathbf{2900} \\ 0x - 7y - 11z = \mathbf{-4300} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = \mathbf{2400} \\ 0x + 5y + 7z = \mathbf{2900} \quad (* \, \mathbf{7/5}=1.4) \\ 0x + 0y - 1.2z = \mathbf{-240} \end{cases}$$

Resolução

A solução deve ser

$$V = \text{Transpose}[500 \;\; 300 \;\; 200] = \begin{bmatrix} \mathbf{500.00} \\ \mathbf{300.00} \\ \mathbf{200.00} \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada (estendida)

- Sistema de equações completo para o problema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3x3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1900.00} \\ \mathbf{2400.00} \\ \mathbf{2900.00} \end{bmatrix}_{3x1} \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & \mathbf{1900.00} \\ 1 & 3 & 5 & \mathbf{2400.00} \\ 3 & 2 & 4 & \mathbf{2900.00} \end{array}\right]_{3x4}$$

Resolva os dois sistemas e opine sobre X

Seja o sistema A X = F

1. Se $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$

2. Se $A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1998.99 \\ 1997.01 \end{bmatrix}$

Respostas: 1. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2. $X = \begin{bmatrix} 20.97 \\ -18.99 \end{bmatrix}$

Mais exercícios

Resolva os seguintes sistemas lineares:

1. $$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ y + 5z = 2 \\ -2y - 10z = -8 \end{cases}$$

Operações elementares em matrizes

1. Permutar a linha (coluna) i e a linha (coluna) j.
2. Multiplicar uma linha (coluna) vezes um escalar não nulo, e substituir os resultados na mesma linha.
3. Multiplicar uma linha i vezes um escalar, não nulo, e somar sobre a linha j, substituindo o resultado na linha j.

Observar o que acontece quando essas operações são realizadas em um sistema de equações.

Definições

A matriz B é equivalente a A, desde que B possa ser obtida de A a partir de um conjunto finito de operações elementares.

Uma matriz é dita escalonada, se todas as entradas abaixo ou acima da diagonal são zeros.

Toda matriz tem uma matriz equivalente escalonada.

Posto de uma matriz A, é o menor número de linhas (colunas) não nulas considerando todas as matrizes escalonadas equivalentes de A, **p** → p < m.

Nulidade é a diferença **N** = m **-** **p**.