Ajuste quadrático

- Para ajustar com um polinômio quadrático:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

- Exemplo:

Item	x_i	y_i
1	0.8	-2.50
2	1.0	-1.00
3	1.5	-0.40
4	2.0	-0.25
$\sum$	5.3	-4.15

Forma geral no ajuste quadrático

$$y_i = ax_i^2 + bx_i + c$$

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \\ \\ y_i = ax_i^2 + bx_i + c \\ \\ y_n = ax_n^2 + bx_n + c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & & \\ x_i^2 & x_i & 1 \\ & & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ y_i \\ \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow A_{nx3} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B_{nx1}$$

Multiplicando no sistema matricial pela transposta:

$$A^t_{3\times n} A_{n\times 3} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^t_{3\times n} B_{n\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_i^2 & & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_i & & x_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & & \\ x_i^2 & x_i & 1 \\ & & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_i^2 & & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_i & & x_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ y_i \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_i^2 & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_i & x_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & & \\ x_i^2 & x_i & 1 \\ & & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_i^2 & x_n^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_i & x_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \\ y_i \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix}$$

Exemplo: Ajuste quadrático

- Para ajustar com um polinômio quadrático:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

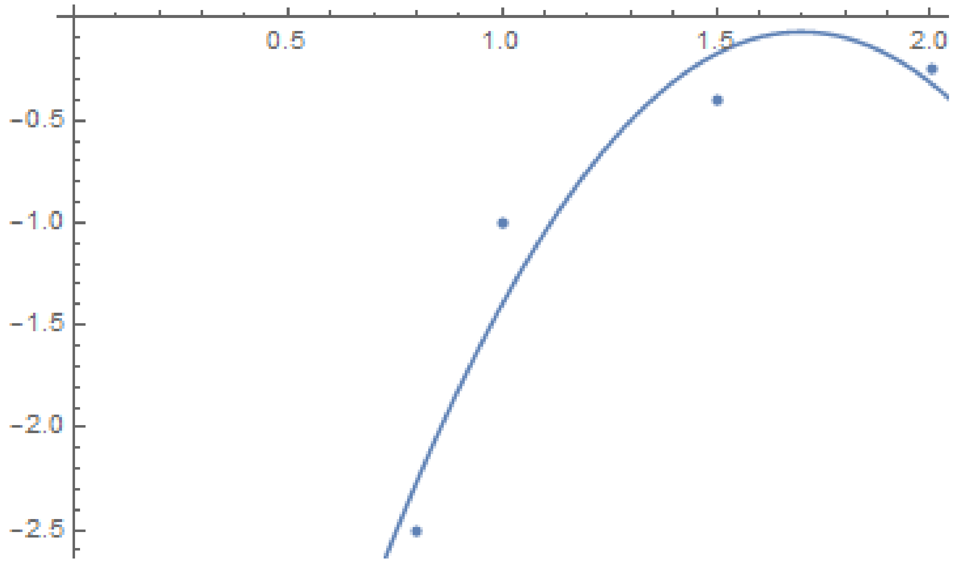
- Exemplo:

Item	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.8	−2.50	0.64	0.512	0.4096	−2.00	−1.6
2	1.0	−1.00	1.00	1.00	1.00	−1.00	−1.0
3	1.5	−0.40	2.25	3.375	5.0625	−0.60	−0.9
4	2.0	−0.25	4.00	8.00	16.00	−0.50	−1.0
$\sum$	5.3	−4.15	7.89	12.887	22.472	−4.10	−4.5

Para o exemplo

$$\begin{bmatrix} 22.472 & 12.887 & 7.89 \\ 12.887 & 7.89 & 5.3 \\ 7.89 & 5.3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.5 \\ -4.1 \\ -4.15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y = -2.725\, x^2 + 9.254\, x - 7.924$$



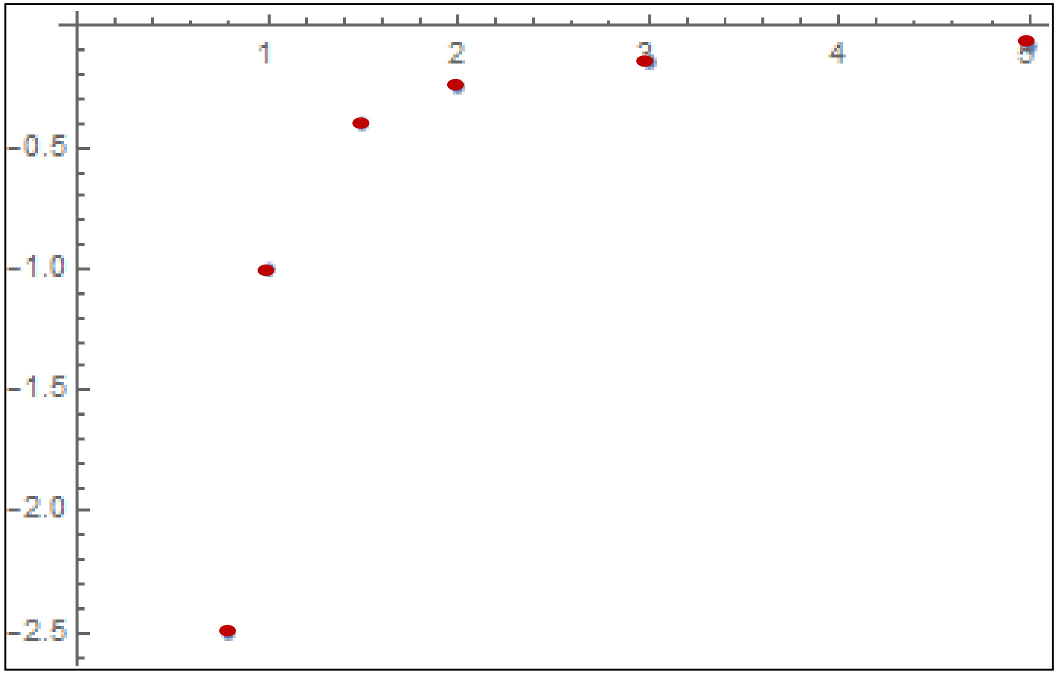
Observar

- O ajuste quadrático foi atingido.
- Mas olhando os dados, existe uma grande diferença entre os dados coletados e o ajuste quadrático.
- Leva a pensar se os dados são insuficientes.
- Imaginemos que temos a oportunidade de realizar mais duas experiências.

Temos um comportamento como:

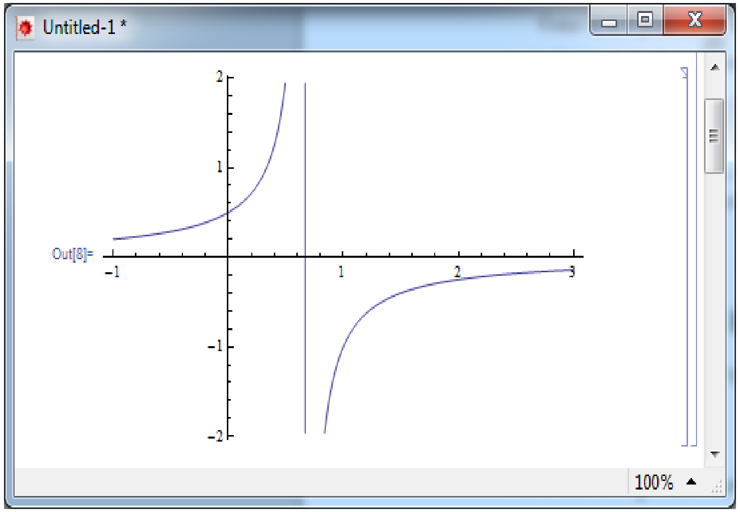
- Observar os dados, e fazemos um desenho:

$item$	x_i	y_i
1	0.8	-2.5
2	1.0	-1.0
3	1.5	-0.4
4	2.0	-0.25
5	3.0	$-1/7$
6	5.0	$-1/13$



Quais curvas posso utilizar?

- Reta: $y = a\,x + b$
- Parábola: $y = a\,x^2 + b\,x + c$
- Hipérbole: $y = \dfrac{1}{ax + b} \Rightarrow$



- Função exponencial:

$$y = Ce^{ax}$$