MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Lista de Exercícios sobre Zeros de Funções

1: Mostre que a função $f(x) = x^2 - 4x + \cos x$ possui exatamente duas raízes: $\alpha_1 \in [0, 1.8]$ e $\alpha_2 \in [3, 5]$. Considere as funções:

$$\phi_1(x) = \frac{x^2 + \cos x}{4} \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = \frac{\cos x}{4 - x} \; .$$

Assinale C para as alternativas corretas e E para as alternativas erradas:

( ) ϕ_1 pode ser usada no intervalo $[0, 1.8]$ para aproximar α_1 pelo método de aproximações sucessivas, mas ϕ_2 não pode ser usada neste intervalo;

( ) ϕ_1 e ϕ_2 podem ser usadas no intervalo $[0, 1.8]$ para aproximar α_1 pelo método de aproximações sucessivas;

( ) ϕ_2 pode ser usada no intervalo $[3, 5]$ para aproximar α_2 pelo método de aproximações sucessivas, mas ϕ_1 não pode ser usada neste intervalo;

( ) ϕ_1 e ϕ_2 podem ser usadas no intervalo $[3, 5]$ para aproximar α_2 pelo método de aproximações sucessivas;

( ) ϕ_1 pode ser usada para aproximar α_1 no intervalo $[0, 1.8]$ e também para aproximar α_2 no intervalo $[3, 5]$.

2: Em cada caso, avalie o valor de $K = \max_{x \in I} |\phi'(x)|$ e assinale com V as alternativas verdadeiras e com F as falsas.

( ) Se $\phi(x) = x(2 - \ln x)$, $I = [2, 3]$, então $K = 0.5$;

( ) Se $\phi(x) = \dfrac{1 - e^{-x} \sin x}{2}$, $I = [-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$, então $K = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$;

( ) Se $\phi(x) = x - \dfrac{1}{2}(\sin x - e^{-x})$, $I = [0, \dfrac{\pi}{2}]$, então $K = \dfrac{3e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{3e^{\frac{\pi}{2}}}$;

3: (a) Seja p um número inteiro positivo. Mostre que a sequência

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\big((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\big)$$

pode ser utilizada para calcular $\sqrt[p]{a}$, quando $a \geq 0$.

(b) Utilizando (a), calcular $\sqrt[3]{7}$ com precisão pré-fixada $\varepsilon = 0.001$.

4: Aplique o método de Newton para calcular o maior zero de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, justificando o que for necessário para garantir a convergência do processo. A seguir, efetue quatro iterações utilizando aritmética de ponto flutuante com três algarismos significativos, apresentando os resultados numa tabela. Faça também um esboço gráfico de f.

5: É dado o polinômio $p(x) = x^3 - 0.25x^2 + 0.75x - 2$.

(a) Delimite um intervalo que contenha um único zero real $\overline{x}$ de $p(x)$.

(b) Mostre que o Método de Newton é convergente para $\overline{x}$ caso tomemos $x_0 = 1$. Justifique!

(c) Calcule o zero real de $p(x)$ com precisão $\varepsilon = 0.01$ a partir de $x_0 = 1$.

6: (a) Mostre que a função $\phi(x) = \cos(\frac{3x}{2} - 1)$ possui um único ponto fixo $\overline{x}$ no intervalo $[0, \frac{4}{3}]$.

(b) Determine um intervalo I tal que para todo $x_0 \in I$ a seqüência $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, convirja para o ponto fixo $\overline{x}$ de ϕ. Justifique!

(c) Delimite o erro de truncamento $|x_5 - \overline{x}|$ obtido ao se escolher $x_0 = 0.95$.

7: Considere as funções reais $f(x) = \sin x - e^{-x}$ e $\phi(x) = x - K(\sin x - e^{-x})$

(a) Mostre que $f(x)$ tem uma única raiz $\overline{x}$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

(b) Considere o processo iterativo $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ Determine os valores da constante K para os quais a seqüência x_n permanece no intervalo $[0, \pi/2]$ para todo n e converge para $\overline{x}$ quando $n \to \infty$.

8: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com um único zero $\overline{x} \in (a, b)$. Considere o seguinte método iterativo para calcular este zero com uma precisão $\varepsilon > 0$ dada (*método da tricotomia*). Na primeira etapa do processo, dividimos o intervalo $[a, b]$ em *três* partes de mesmo comprimento e decidimos em qual das três se encontra $\overline{x}$. Obtemos assim um novo intervalo e repetimos o processo, iterativamente desta forma até isolarmos $\overline{x}$ num intervalo de comprimento menor do que 2ε. Tomamos então o ponto médio deste intervalo como a aproximação desejada de $\overline{x}$. Sabendo que $1 < \sqrt[3]{7} < 2$, utilize este método para calcular $\sqrt[3]{7}$ com precisão $\varepsilon = 0.1$.

9: Seja $f(x) = e^x - 4x^2$.

(a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui três soluções reais.

(b) Utilize o método de Newton para calcular a maior das soluções com precisão pré-fixada de 0.01.

10: Em um método de aproximações sucessivas, calcula-se a seqüência $x_{n+1} = \phi(x_n)$ a partir de um valor inicial x_0. Dê exemplos de funções $\phi(x)$ (com os repectivos x_0) tais que:

(a) A seqüência x_n converge alternadamente.

(b) A seqüência x_n converge monotonicamente.

(c) A seqüência x_n não converge.

Justifique!

11: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com f' contínua e com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, e suponha que f tem um único zero $\overline{x}$ em (a, b). O *método das secantes* para se determinar $\overline{x}$ consiste em escolher $x_0 = a$, $x_1 = b$ e a partir deles considerar o processo iterativo dado por

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, x_{k-1}]} \;,$$

onde $f[\alpha, \beta] = (f(\alpha) - f(\beta))/(\alpha - \beta)$.

(a) Ao utilizarmos o método das secantes para encontrar a raiz de uma certa função, obtivemos a seguinte fórmula para o processo iterativo:

$$x_{k+1} \;=\; \frac{x_k x_{k-1} + 1}{x_k + x_{k-1} - 1} \;.$$

Perguntamos: qual é a fórmula do *método de Newton* aplicado a esta mesma função?

(b) Efetue duas iterações do método das secantes para a função do item (a) restrita ao intervalo $[1, 2]$.

12: Seja $f(t) = 5te^{-t/3}$. Mostre que a equação $f(t) = 5$ possui exatamente duas raízes reais e que a maior delas se localiza em [4,5]. Use o método de Newton para determinar esta maior raiz com precisão pré-fixada de 10^{-3}, justificando o porquê da convergência da sequência gerada pelo método.

13: Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 4x + 1$, que possui três raízes reais, determine um intervalo I de comprimento menor ou igual a 0.5, tal que o método de Newton convirja para a segunda raiz de $p(x)$ para qualquer valor inicial x_0 em I. (Justifique!) Determine essa raiz com precisão pré-fixada $\epsilon = 10^{-3}$, tomando como x_0 um dos extremos de I.

14: Um carro se move ao longo de uma estrada com velocidade instantânea $v(t) = 5e^{-t}$ m/s. Definimos $\bar{t}$ como o instante para o qual a velocidade média do carro no intervalo $[0, \bar{t}]$ é igual a 2.5 m/s. (Obs: A velocidade média no intervalo $[0, \bar{t}]$ é o quociente da distância percorrida neste intervalo, pelo valor de $\bar{t}$.) Utilize um método de aproximações sucessivas para calcular $\bar{t}$. (Calcule 3 iterações. Você deve escolher o valor inicial t_0 de modo a garantir a convergência. Justifique!)

15: Uma fábrica possui material para confecção de uma lata cilíndrica com área total de superfície de 800 cm^2. Deseja-se uma lata com esta área de superfície e volume de 1 litro. Determine através de um método de aproximações sucessivas qual o raio da lata e sua correspondente altura. Efetue 3 iterações do método e estime o número de iterações necessárias para um erro menor que 10^{-5}. Justifique a convergência do método. (Obs: deseja-se a lata mais alta ...)

16: A função $F(t) = 100/(1 + 9e^{-t/2})$ representa a evolução de uma população ao longo do tempo a partir de $t = 0$. Mostre que esta população é crescente e limitada, e que a equação $F(t) = 25$ possui única solução. Ao aplicarmos o método de Newton para solução desta equação partindo de $t_0 = 1$ haverá convergência? (Justifique!) Calcule 3 iterações partindo de $t_0 = 1$ e avalie se o erro fica menor que 10^{-3} (sem usar o valor da solução exata).

17: (a) Mostre que a função $g(x) = x^2 + e^{-x}$ tem um único ponto de mínimo positivo.

(b) Calcule uma aproximação para este ponto utilizando o método de Newton (calcule 3 iterações a partir de $x_0 = 1$. Mostre que o método de Newton é convergente para esta escolha de x_0.)

(c) Sem determinar o valor da solução verifique se o valor determinado no item (b) dista menos que 10^{-3} do ponto de mínimo. Justifique.

18: (a) Mostre que a função $f(x) = \sin(x) - x^4$ tem uma única raiz positiva.

(b) Calcule esta raiz pelo método de Newton com precisão pré-fixada de 10^{-3} a partir de $x_0 = 1.0$, justificando por que se pode garantir a convergência do método de Newton neste caso (para a raiz positiva).

(c) Caso calculemos a outra raiz ($x = 0$) de f pelo método de Newton, a convergência será alternada. Quais as propriedades de f em $x = 0$ que fazem com que esta convergência seja alternada?

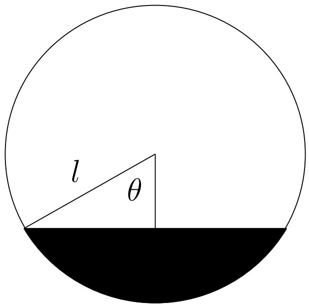
19: Uma loja vende um produto por um preço P em 10 vezes "sem acréscimo" (as prestações devem ser pagas mensalmente, sendo a primeira um mês após a compra). Suponha que este preço P seja o dobro do preço à vista. Queremos determinar qual a taxa de juros mensal (a cada real investido por um mês se recebe r ($r > 1$) reais) para que o valor à vista ($P/2$) seja suficiente para cobrir todas as prestações (com a aplicação mês a mês dos montantes ainda disponíveis).

(a) Mostre que o valor r correspondente à taxa de juros satisfaz a equação $r = (6. - r^{-10})/5$

(b) Mostre que o valor de r procurado fica entre 1.1 e 1.2 (correspondendo a taxas entre 10 e 20% ao mês).

(c) Calcule r através de 2 iterações da sequência $r_{n+1} = \Phi(r_n)$ sugerida em a), escolhendo r_0 de forma a garantir a convergência. Justifique!

20: Um tanque tem a forma de um cilindro reto, com raio igual a 1 e comprimento l. Sua lateral (circular) é transparente e através dela podemos observar o nível de líquido no cilindro ("deitado"). A porcentagem de líquido no cilindro pode ser obtida em função do ângulo θ (veja a figura). Por exemplo, o cilindro está cheio para $\theta = \pi$ e pela metade para $\theta = \pi/2$. Calcule com erro menor que 10^{-3} o valor de θ para o qual o cilindro tem um quarto de seu volume cheio, através de um método de aproximações sucessivas. Justifique todos os passos de forma a garantir a convergência.



21: Um vaso de 30 cm de altura tem secções transversais de área πe^{2h} para h de 0 a 30 cm. O volume de água (em cm^3) que ele contém, estando cheio até uma altura a, é dado por $V(a) = \int_0^a \pi e^{2x} dx$. Até que altura deve-se encher o vaso para que ele contenha 5 cm^3 de água? Use o método de Newton, determinando um intervalo que contenha a solução e justificando a escolha do valor inicial de forma a garantir a convergência (com erro menor que 10^{-3}).

MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

22: Mostre que a função $f(x) = x^3 - 8x - 5$ tem três raízes reais distintas. Prove que partindo-se de $x_0 = 0.1$, a sequência gerada pelo Método de Newton converge para a raiz intermediária. Calcule então essa raiz com precisão 10^{-2}.

23: A velocidade de um cavalo pontual em queda livre sob a ação das forças gravitacional e de resistência do ar, com velocidade inicial nula, é

$$v(t) = mg\left[\frac{1 - exp(-kt/m)}{k}\right].$$

A fim de determinar a constante k experimentalmente, lançamos o cavalo de massa $m = 1kg$ com velocidade inicial $v(0) = 0$ e verificamos que sua velocidade após 30 segundos de queda é de $100m/s$. Assumindo $g = 10m/s^2$, utilize o método de Newton com precisão pré-fixada para calcular o valor de k com erro máximo de 10^{-4}. Justifique cuidadosamente todas as etapas deste cálculo.

24: Um cavalo está preso por uma corda em um pasto quadrado de lado igual a $200m$, sendo que a extremidade da corda está presa por uma estaca fincada na metade de um dos lados. Determine o tamanho r da corda de modo que a área do pasto para o cavalo seja metade da área total do pasto.

25: Mostre que as funções $\Phi_1(x) = e^{-x^2}$ e $\Phi_2(y) = e^{-2y^2}$ possuem único ponto fixo em $[0 : 1]$. Considere as sequências $x_{n+1} = \Phi_1(x_n)$ e $y_{n+1} = \Phi_2(y_n)$, com $x_0 = y_0 = 0$. Uma delas converge para o ponto fixo da função Φ_i correspondente e a outra não. Justifique o porque da convergência e da não convergência destas sequências. Para a sequência convergente, estime a partir de qual iteração os elementos da sequência distam menos que 10^{-6} do ponto fixo. Calcule 4 iterações desta sequência e delimite a distância do quarto elemento ao ponto fixo.

26: A função $f(x) = nln(x)$, possui uma raiz isolada no intervalo $J =]0, 4]$.

a) Através das hipóteses do teorema da convexidade identifique o maior subintervalo de J para o qual é possível garantir a convergência a priori do método de Newton-Raphson, para essa raiz.

b) Para o chute inicial $x_0 = 0.4$ identifique o tipo de sequencia gerado pelas iteradas da função do método de Newton-Raphson e aplique o algoritmo de aceleração de convergência de forma a garantir uma precisão pré-fixada de 0.001. Trabalhe com 4 algarismos significativos e faça no máximo duas iteradas do algoritmo de aceleração.

27: Os gráficos de $y = e^x$ e $y = 5x^2$ se cruzam em 3 pontos. Utilize o método de Newton para calcular o ponto de cruzamento com a maior abcissa x, com precisão pré-fixada $\epsilon = 10^{-3}$ em x. Justifique sua resposta isolando 3 raízes e explicitando as hipóteses do teorema de convergência utilizado.

28: Aplique o método de Newton à função $f(x) = 4x^3 - 4x^2 + x - 2$ para encontrar uma solução real da equação $f(x) = 0$ com precisão pré-fixada $\epsilon = 10^{-3}$. Justifique tudo o que for necessário para garantir convergência.

29: Mostre que a função $\sin 2x$ tem um único ponto fixo $\bar{x} > 0$. Utilize o método de Newton para calculá-lo com precisão pré-fixada de $\epsilon = 10^{-3}$ a partir de $x_0 = \pi/2$, justificando porque se pode garantir a convergência para $\bar{x}$ a partir deste x_0.

30: Mostre que a função

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x^2}\right)$$

possui único ponto fixo $\bar{x}$ positivo. Determine a tal que para todo x_0 em $[a : 3]$ a sequência $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ convirja para $\bar{x}$ (justifique!!). Estime quantas iterações são necessárias para se obter um erro menor que 10^{-2} na determinação de $\bar{x}$ a partir de $x_0 = 3$. Calcule x_1 e x_2 e delimite $|x_2 - \bar{x}|$.