4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

Ministrado por

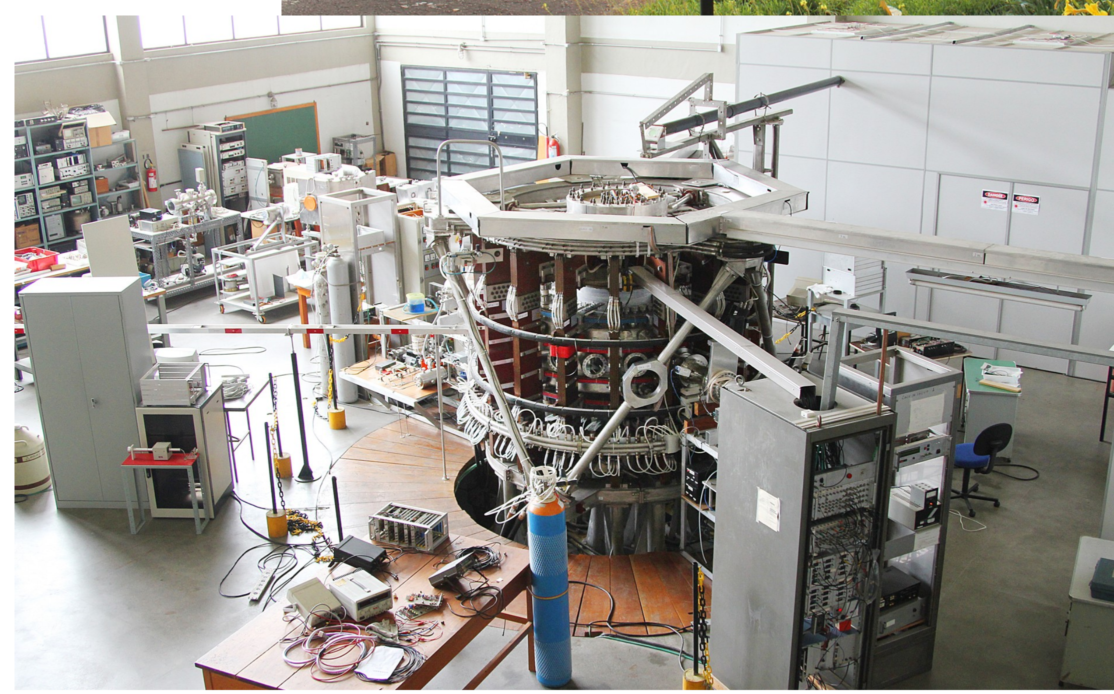
Prof. Gustavo Paganini Canal

Laboratório de Física de Plasmas

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física

Universidade de São Paulo



Curso de graduação ministrado remotamente e oferecido pelo

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

IFUSP
Instituto de Física da USP

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 28 de Abril de 2021

SCIENTIA VINCES

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Campo magnético variante no tempo e invariantes adiabáticos*

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Como vimos, campos magnéticos não realizam trabalho sobre partículas carregadas**
  - Apenas campos elétricos alteram a energia cinética de uma carga

- **No entanto, sabemos pela lei de Faraday que existe um campo $\mathbf{E}$ associado à uma campo $\mathbf{B}$ variante no tempo**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- **Para entender o efeito de um campo magnético variante no tempo sobre a órbita de partículas carregadas, vamos supor que exista um campo magnético $\mathbf{B}(t) = B(t)\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$, de modo que $(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B} \ll 1$**

- **Exercício: mostre que o campo elétrico induzido é igual à (veja Bittencourt cap. 4, seção 4.1)**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Usando esse resultado na equação de movimento, obtemos**

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_c}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{v}$$

- **No entanto, ao invés de resolver a equação de movimento, iremos abordar o problema calculando a variação na energia cinética perpendicular devido ao campo $\mathbf{B}(t)$**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = q\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

  – *Aqui, $d\mathbf{r}$ é um elemento de caminho ao longo da trajetória da partícula de modo que $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{r}/dt$*

- **Supondo que $\frac{1}{|\mathbf{B}|}\left|\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right| \ll \frac{|\boldsymbol{\Omega}_c|}{2\pi}$, ou seja, que o campo $\mathbf{B}$ varie lentamente com relação ao period ciclotrônico, podemos supor que a trajetória seja fechada**

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Dessa forma, temos que**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = q\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = q\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S} = -q\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = |q|\frac{\partial B}{\partial t}\pi\rho^2$$

- **Tomando a variação de $\mathbf{B}$ num período ciclotrônico como sendo**

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial t}\delta t = \frac{\partial B}{\partial t}\frac{2\pi}{\Omega_c}$$

- **Usando as relações $\rho^2 = v_\perp^2/\Omega_c^2$ e $\Omega_c = |q|B/m$, temos que**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{mv_\perp^2}{2B}\delta B = |\boldsymbol{\mu}|\delta B$$

  – *Aqui, $|\boldsymbol{\mu}| = mv_\perp^2/2B$ é o momento magnético devido ao movimento ciclotrônico*

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Note, portanto, que como $\mu B = mv_\perp^2/2$, temos que $\delta(\mu B) = \delta(mv_\perp^2/2)$ e assim**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \mu\delta B + B\delta\mu$$

- **Comparando com a expressão obtido:**

$$\delta\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{mv_\perp^2}{2B}\delta B = \mu\delta B$$

Vemos que $\delta\mu = 0$

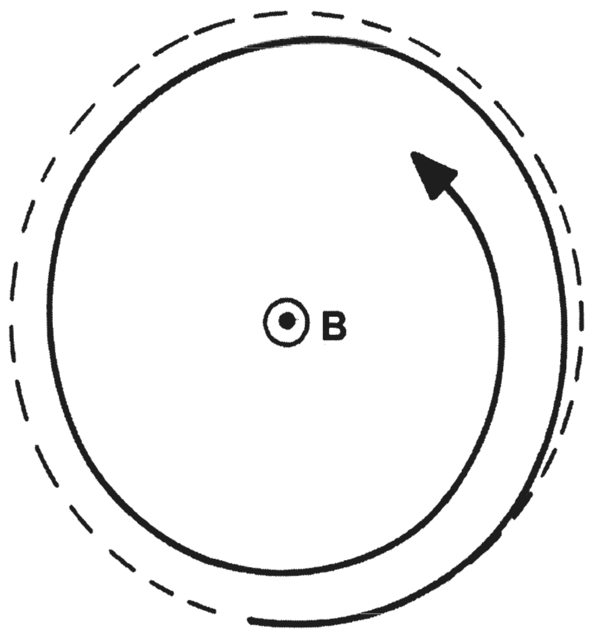
- *O momento magnético é invariante em campos magnéticos que variam lentamente com relação ao período ciclotrônico*

- **Exercício: mostre, a partir desse resultado, que o fluxo magnético através de uma órbita ciclotrônica, $\Phi = B\pi\rho^2$, também é um invariante adiabático**

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B\pi\rho^2) = 0$$

Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **No caso mais geral, a órbita da partícula pode ser bastante complicada**
  - *Mesmo sem considerar não-uniformidades no campo* $\mathbf{B}$*, se sua variação for rápida, a órbita da partícula já não se fecha mais*



- **Vamos considerar o caso simples em que** $\mathbf{B}(t) = B(t)\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$ **e** $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{r}}{2} \times \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

  e calcular a deriva ExB devido à esses campos

$$\mathbf{V_{ExB}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \left(\frac{\mathbf{r}}{2} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \times \frac{\mathbf{B}}{B^2}$$

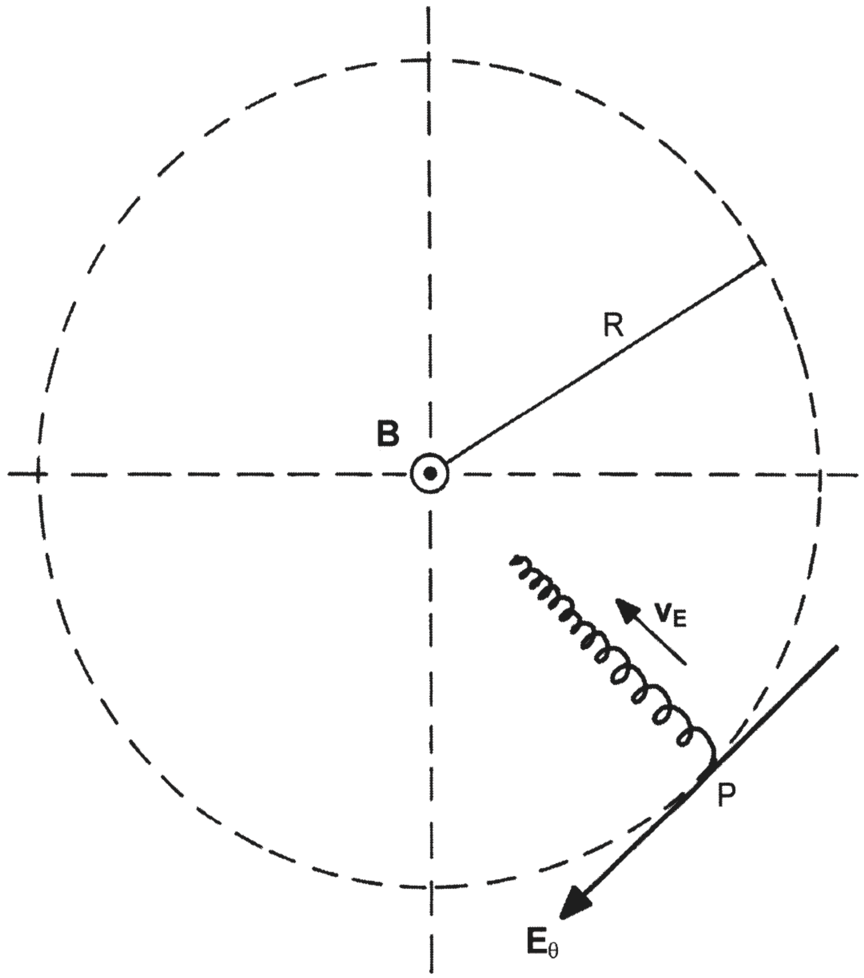
Deriva devido à variação temporal do campo magnético

- **Como $\mathbf{r} \perp \mathbf{B}$, temos que**

$$\mathbf{V}_{\mathbf{ExB}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\mathbf{r}}{B}$$

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \text{const}$$

$$B\pi\rho^2 = \text{const}$$



  - *A medida que a partícula sofre uma deriva radialmente para dentro ($\partial B/\partial t > 0$), seu raio de Larmor diminui*
  - *Como a densidade de linhas de campo aumenta, a deriva radial pode ser interpretada como um movimento radial das linhas de campo, com o centro guia da partícula estando preso (congelado) numa linha de campo*
  - *Esse mecanismo foi utilizado para aquecer plasmas*

Exercício: aquecimento de plasma por compressão adiabática

- **Usando os campos $\mathbf{E_0}$ e $\mathbf{B_0}$ do exercício anterior, siga os passos indicados abaix**
  - *Suponha que, em $t = t_0$, a energia cinética média de cada partícula seja*

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\langle v_\parallel^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_\perp^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T_\parallel + k_B T_\perp$$

    e que $T_\parallel(t_0) = T_\perp(t_0) = T_0$. Suponha ainda que, entre $t = t_0$ e $t = t_1$, o campo $\mathbf{B_0}$ varie adiabaticamente, $\mathbf{B_0} = B_0\left[1 + \left(t - t_0\right)/\left(t_1 - t_0\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$, de modo que não haja tempo para as temperaturas se equilibrarem. Quais os valores de $T_\parallel(t_1)$ e $T_\perp(t_1)$?
  - *Entre $t = t_1$ e $t = t_2$, o campo magnético é mantido constante até que $T_\parallel(t_2) = T_\perp(t_2) = T_2$. Qual é o valor de T_2?*
  - *Entre $t = t_2$ e $t = t_3$, o campo $\mathbf{B_0}$ varia adiabaticamente para seu valor original, $\mathbf{B_0} = B_0\left[2 - \left(t - t_2\right)/\left(t_3 - t_2\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$. Novamente, não há tempo suficiente para as temperaturas se equilibrarem. Quais os valores de $T_\parallel(t_3)$ e $T_\perp(t_3)$?*
  - *Entre $t = t_3$ e $t = t_f$, o campo $\mathbf{B_0}$ é mantido constante até que $T_\parallel(t_f) = T_\perp(t_f) = T_f$. Qual é a temperatura final do plasmas?*

Resposta: $T_f = 10\,T_0/9$ (para um único ciclo)

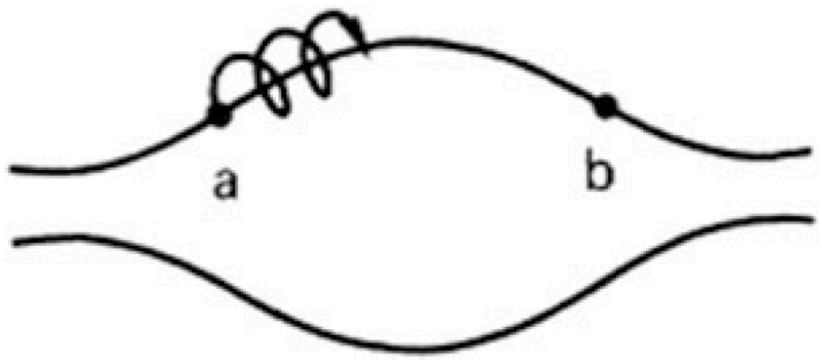
Invariantes adiabáticos

- **O primeiro invariante: momento magnético (ou fluxo magnético)**

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \text{const} \qquad\qquad B\pi\rho^2 = \text{const}$$

- **O segundo invariante: o invariante longitudinal**

$$J = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint v_\parallel \, dl$$



  - *Esse invariante foi invocado por Enrico Fermi para explicar a existência de partículas carregadas de alta energia (raios cósmicos)*

- **Exercício: mostre que J é um invariante adiabático**

Exercícios

- **Exercício do F.F. Chen:**
  - *2.12, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.18, 2.20 e 2.21*

- **Exercício do Bittencourt:**
  - *3.4*

Referências

- **F.F. Chen**
  - *Capítulo 2, seções 2.6 e 2.8*

- **Referência adicional**
  - *Bittencourt: Cap. 4, seção 4*