4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

Ministrado por

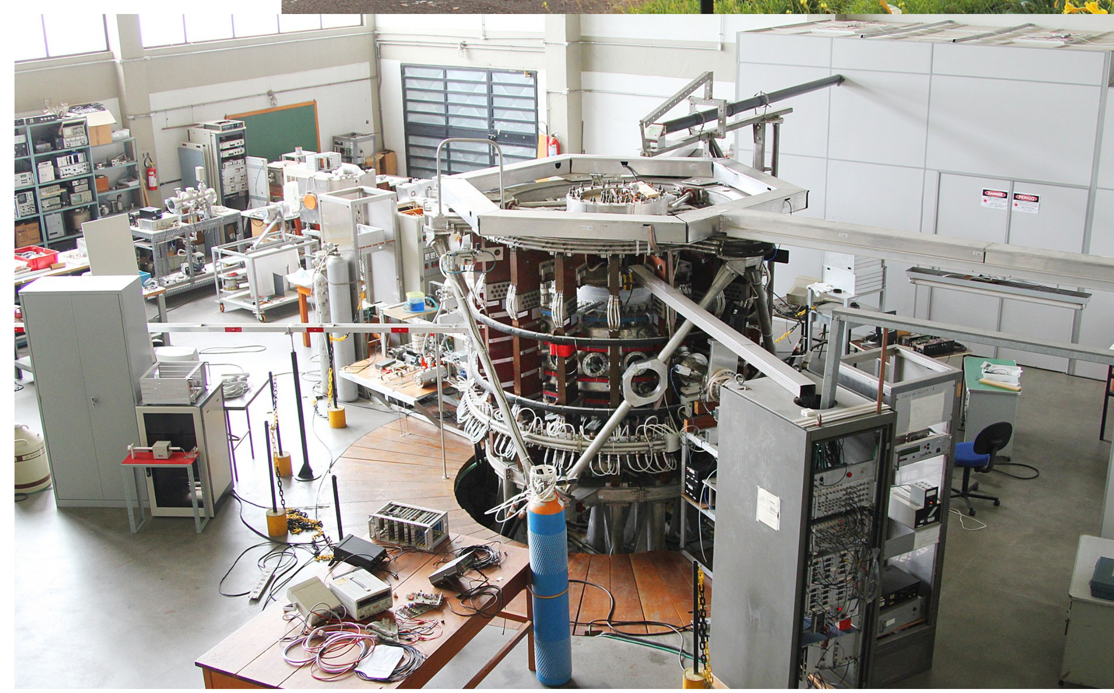
Prof. Gustavo Paganini Canal

Laboratório de Física de Plasmas

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física

Universidade de São Paulo



Curso de graduação ministrado remotamente e oferecido pelo

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

IFUSP
Instituto de Física da USP

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 26 de Abril de 2021

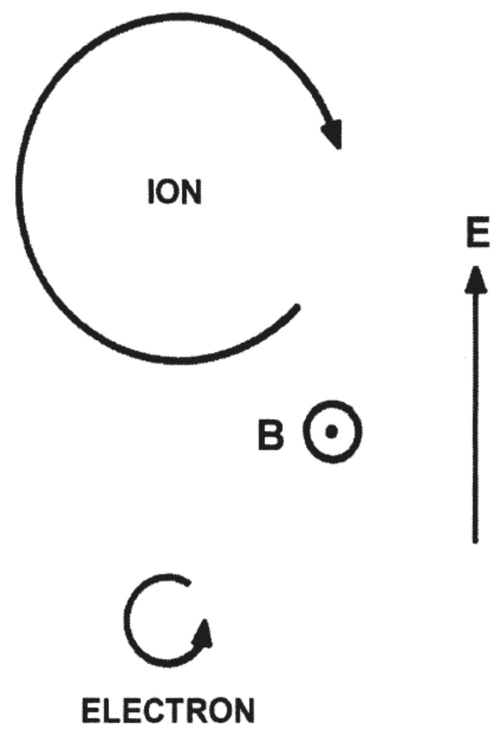
- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Campo elétrico estático e não-uniforme*
  - *Campo elétrico variante no tempo*

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Campo elétrico estático e não-uniforme*
  - *Campo elétrico variante no tempo*

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Também se pode esperar que se o campo elétrico varia ao longo do raio de Larmor, uma velocidade de deriva pode surgir**

- **Em primeira ordem, na qual o campo elétrico varia linearmente, uma partícula carregada executando um movimento ciclotrônico passa por uma região com campo $\mathbf{E}_0$ mais forte e passa por uma região com campo $\mathbf{E}_0$ mais fraco**
  - Na média, a correção de primeira order se cancela
  - Portanto, não uniformidades no campo $\mathbf{E}_0$ são importantes apenas como correções de segunda ordem



Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Para estudar a trajetória de partículas carregadas em campos elétricos não-uniformes, temos que expandir o campo em torno de uma posição centrada com o movimento de Larmor, que é chamada de centro guia**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{R},t) + \left[(\mathbf{r}-\mathbf{R})\cdot\nabla\right]\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \frac{1}{2}\left[(\mathbf{r}-\mathbf{R})\cdot\nabla\right]^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + O^3$$

- **Usando a definição da posição instantânea da partícula:** $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$
  - Portanto, o campo elétrico, expandido até segunda ordem em $\boldsymbol{\rho}$, é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E_0} + (\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{E_0} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)^2\mathbf{E_0}$$

  - Aqui, $\mathbf{E_0} = \mathbf{E}(\mathbf{R})$ é o valor do campo na posição do centro guia $\mathbf{R}(t)$
  - O termo de primeira ordem é $(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{E_0} = (\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}$
  - O termo de segunda ordem é $(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)^2\mathbf{E_0} = (\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla)^2\mathbf{E}(\mathbf{r})\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}$

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Vamos supor que o campo magnético seja uniforme, mas que o campo elétrico seja não-uniforme com variação senoidal na direção x do tipo**

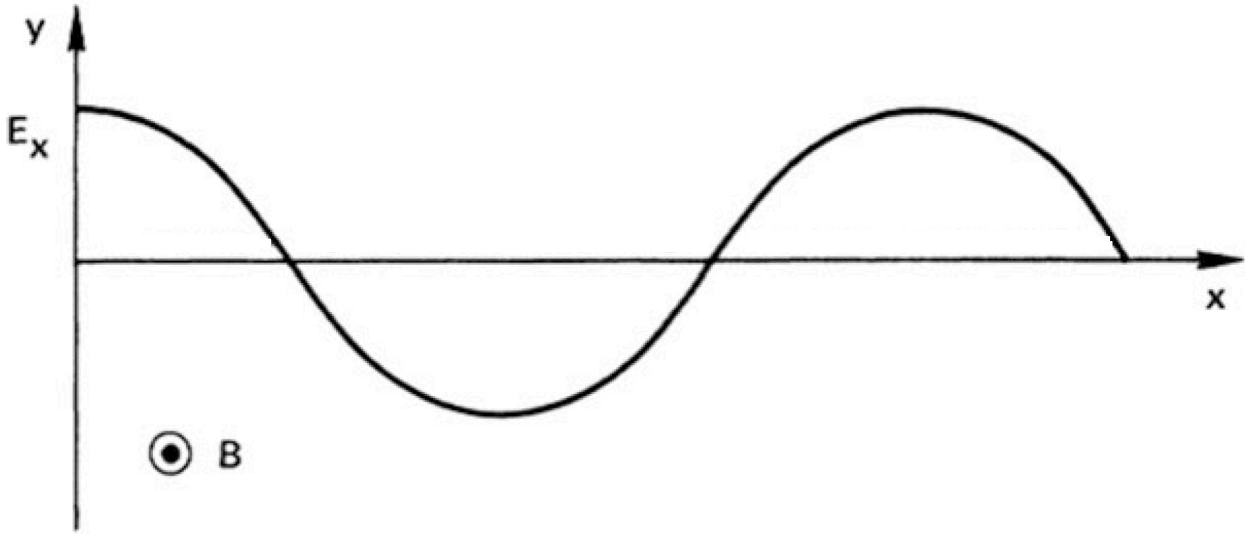
$$\mathbf{E}(x) = E_0 \cos(kx)\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{x}$$

ou seja, a distribuição do campo possui um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ **devido à uma distribuição senoidal de cargas**

- **Nesse caso, a equação de movimento torna-se**

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left[\mathbf{E}(x) + \mathbf{v}\times\mathbf{B_0}\right]$$

cujas componentes perpendiculares são



$$\dot{v}_x = \frac{qB_0}{m}v_y + \frac{q}{m}E_x(x)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qB_0}{m}v_x$$

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Tomando a derivada temporal dessas equações, obtemos**

$$\ddot{v}_x = -\Omega_c^2 v_x + \Omega_c \frac{\dot{E}_x(x)}{B_0} \qquad \ddot{v}_y = -\Omega_c^2 v_y - \Omega_c^2 \frac{E_x(x)}{B_0}$$

  - Aqui, $E_x(x)$ é o campo elétrico na posição da partícula
  - Portanto, para encontrar $E_x(x)$, precisamos saber a trajetória da partícula, que é exatamente o que estamos tentando encontrar

- **Para prosseguir, vamos supor que o campo elétrico é fraco e, dessa forma, usar a trajetória não-perturbada da partícula num campo magnético puro para encontrar $E_x(x)$**

- **A trajetória da partícula nessa situação é**

$$x = x_0(t) + \rho \sin(\Omega_c t)$$

  - Aqui, $x_0(t)$ é a posição do centro guia da partícula

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Substituindo essa expressão nas expressões de $\ddot{v}_x$ e $\ddot{v}_y$, encontramos que $\overline{v}_x = 0$ e**

$$\ddot{v}_y = -\Omega_c^2 v_y - \Omega_c^2 \frac{E_0}{B_0} \cos[kx_0 + k\rho \sin(\Omega_c t)]$$

$$\overline{\ddot{v}}_y = 0 = -\Omega_c^2 \overline{v}_y - \Omega_c^2 \frac{E_0}{B_0} \overline{\cos[kx_0 + k\rho \sin(\Omega_c t)]}$$

- **Expandindo o termo em cosseno fornece**

$$\cos[kx_0 + k\rho \sin(\Omega_c t)] = \cos(kx_0)\cos[k\rho \sin(\Omega_c t)] - \sin(kx_0)\sin[k\rho \sin(\Omega_c t)]$$

- **Vamos agora tomar $k\rho \ll 1$**

$$\cos(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \dots$$

$$\sin(\epsilon) = \epsilon + \dots$$

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Essas aproximações nos permitem escrever**

$$\cos[kx_0 + k\rho \sin(\Omega_c t)] \approx \cos(kx_0)\left[1 - \frac{1}{2}k^2\rho^2 \sin^2(\Omega_c t)\right] - \sin(kx_0)k\rho \sin(\Omega_c t)$$

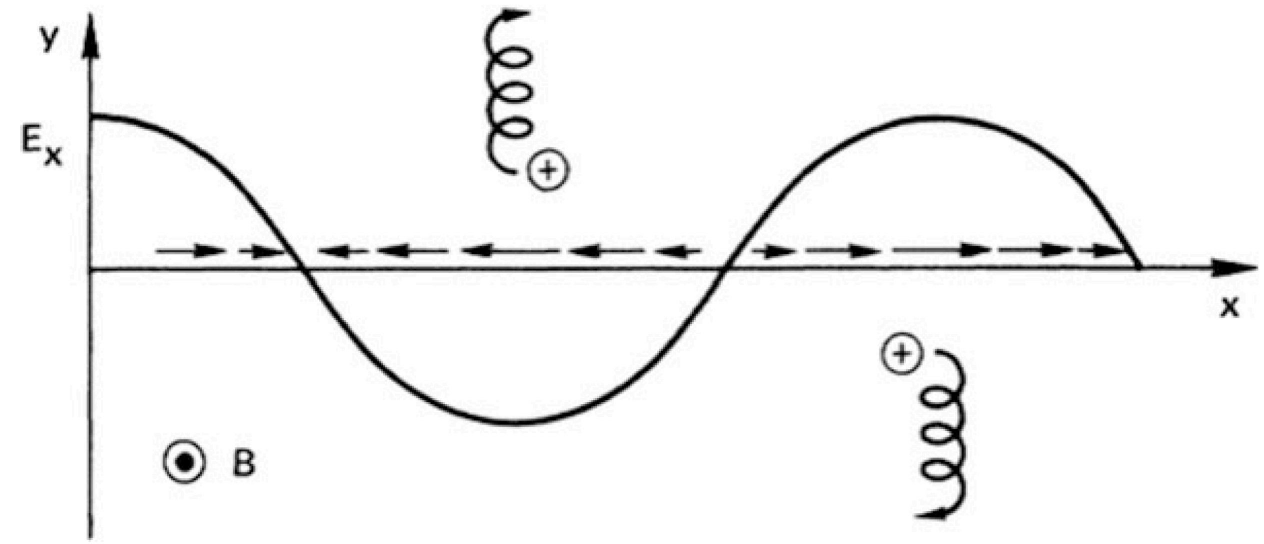
- **Note que o último termo possui média nula e, portanto,**

$$\bar{v}_y = -\frac{E_0}{B_0}\cos(kx_0)\left(1 - \frac{1}{4}k^2\rho^2\right) = -\frac{E_x(x_0)}{B_0}\left(1 - \frac{1}{4}k^2\rho^2\right)$$

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Dessa equação, vemos que a deriva ExB é modificada pela não uniformidade do campo:**

$$\mathbf{v}_{E\times B} = \frac{\mathbf{E}(x)\times\mathbf{B_0}}{B_0^2}\left(1-\frac{1}{4}k^2\rho^2\right)$$



  - Quando a posição do centro guia de um íon se encontra numa região onde o campo elétrico é máximo, este passará boa parte do tempo em regiões de mais baixo campo e, na média portanto, a deriva ExB será menor
  - Em um campo com variação linear, o íon estará numa região de mais alto campo numa metade da órbita e estará numa região de mais baixo campo na outra metade da órbita, ou seja, a correção devido à não-uniformidade do campo se cancela em primeira order (linear)

Deriva devido à não-uniformidades no campo elétrico

- **Vê-se, portanto, que a correção devido à não-uniformidade de $\mathbf{E}_0$ depende da segunda derivada de $\mathbf{E}_0$**
  - Para a distribuição senoidal escolhida, a derivada segunda é sempre negativa com relação à $\mathbf{E}_0$
  - Para uma variação espacial qualquer de $\mathbf{E}_0$, temos que substituir ik por ∇

$$\mathbf{v}_{E\times B} = \frac{\mathbf{E}(x)\times\mathbf{B_0}}{B_0^2}\left(1-\frac{1}{4}k^2\rho^2\right) = \left(1+\frac{1}{4}\rho^2\nabla^2\right)\frac{\mathbf{E}(x)\times\mathbf{B_0}}{B_0^2}$$

  - A correção de segunda ordem acima é devido a um raio de Larmor finito

- **Porque esta correção, mesmo sendo de segunda ordem, é importante?**
  - Uma vez que a deriva agora depende do raio de Larmor, $\mathbf{v}_{E\times B}$ não é mais independente do tipo de partícula
  - Se houver algum desequilíbrio de cargas (ainda que pequeno), o campo elétrico poderá resultar numa separação de cargas que pode reforçar o campo gerado. Essa instabilidade é chamada de instabilidade de deriva

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
  - *Campo elétrico estático e não-uniforme*
  - *Campo elétrico variante no tempo*

Deriva devido à variação temporal do campo elétrico

- **Vamos supor agora que os campos elétrico e magnético sejam uniformes, mas que o campo elétrico seja dependente do tempo**

$$\mathbf{E}(x) = E_0\, e^{i\omega t}\, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}$$

- **Como $\dot{E}_x = i\omega E_x$, isso nos permite reescrever as equações obtidas anteriormente**

$$\ddot{v}_x = -\,\Omega_c^2\, v_x + \Omega_c \frac{\dot{E}_x}{B_0} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{v}_x = -\,\Omega_c^2 \left[v_x - \frac{i\omega}{\Omega_c} \frac{E_x(t)}{B_0} \right]$$

$$\ddot{v}_y = -\,\Omega_c^2\, v_y - \Omega_c^2 \frac{E_x}{B_0} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{v}_y = -\,\Omega_c^2 \left[v_y + \frac{E_x(t)}{B_0} \right]$$

- **Vamos agora definir**

$$v_{ExB} = -\,\frac{E_x(t)}{B_0} \quad \textit{(Deriva ExB)} \qquad\qquad v_{pol} = \frac{i\omega}{\Omega_c}\frac{E_x(t)}{B_0} \quad \textit{(Deriva de polarização)}$$

Deriva devido à variação temporal do campo elétrico

- **Com isso temos que**

$$\ddot{v}_x = -\,\Omega_c^2\left(v_x - v_{pol}\right)$$

$$\ddot{v}_y = -\,\Omega_c^2\left(v_y - v_{ExB}\right)$$

- **Vamos supor soluções do tipo**

$$v_x = v_\perp\, e^{i\Omega_c t} + v_{pol} \qquad\qquad v_y = i v_\perp\, e^{i\Omega_c t} + v_{ExB}$$

- **Tomando a derivada segunda dessas expressões fornece**

$$\ddot{v}_x = -\,\Omega_c^2 v_x + \left(\Omega_c^2 - \omega^2\right) v_{pol}$$

$$\ddot{v}_y = -\,\Omega_c^2 v_y + \left(\Omega_c^2 - \omega^2\right) v_{ExB}$$

  - *Note que as soluções propostas só são soluções válidas se o campo elétrico variar muito mais lentamente do que* Ω_c*, ou seja, só se* $\omega \ll \Omega_c$

Deriva devido à variação temporal do campo elétrico

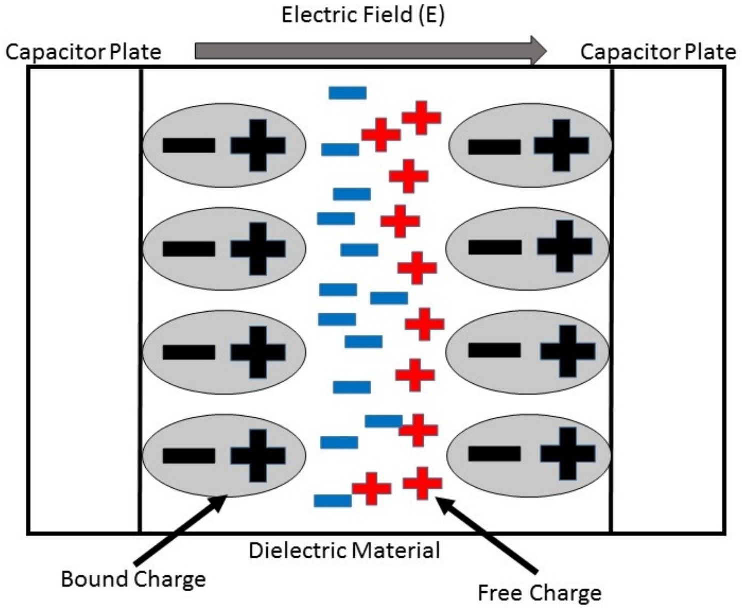
- **Portanto, para o caso de campos elétricos com variação lenta ($\omega \ll \Omega_c$), vemos que movimento do centro guia é composto por 2 componentes**
  - *A deriva ExB: um movimento na direção y (perpendicular a ambos $\mathbf{E_0}$ e $\mathbf{B_0}$)*
  - *A deriva de polarização: um movimento paralelo ao componente de $\mathbf{E_0}$ que é perpendicular ao campo $\mathbf{B_0}$*

- **Para generalizar esse resultado, podemos trocar $i\omega$ por d/dt**

$$\mathbf{v_{pol}} = \frac{m}{qB_0^2}\frac{d\mathbf{E_{0,\perp}}}{dt}$$

A corrente de polarização

- **Uma vez que a deriva de polarização é dependente da carga, um campo elétrico dependente do tempo (perpendicular a $\mathbf{B_0}$) irá produzir uma corrente de polarização líquida em um plasma neutro, de modo que o meio (plasma) se comporte como um dielétrico**



  - *A corrente de polarização é dada por*

$$\mathbf{J_P} = \frac{1}{\delta V}\sum_j q_j \mathbf{v_{pol,j}} = \frac{1}{\delta V}\left(\sum_j m_j\right)\frac{1}{B_0^2}\frac{d\mathbf{E_{0,\perp}}}{dt} = \frac{\rho_m}{B_0^2}\frac{d\mathbf{E_{0,\perp}}}{dt}$$

  - *Um campo $\mathbf{E_0}$ estático não produz um campo de polarização, uma vez que os íons e os elétrons se moverão para preservar a quase neutralidade*

A constante dielétrica de um plasma

- **Para calcular a constante dielétrica de um plasma, vamos inserir a corrente de polarização na equação de Ampère-Maxwell**
  - *Como* $\mathbf{E_0} = \mathbf{E_0}(t)$*, as derivadas de tempo parcial tornam-se derivadas totais*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J_P} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\frac{\rho_m}{B_0^2} \frac{\partial \mathbf{E_{0,\perp}}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E_0}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B_0^2} \right) \frac{d\mathbf{E_{0,\perp}}}{dt} + \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E_{0,\parallel}}}{dt}$$

- **Portanto, a corrente dielétrica perpendicular será**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \frac{d\mathbf{E_0}}{dt} \quad \textit{where} \quad \epsilon_\parallel = \epsilon_0 \quad \textit{and} \quad \epsilon_\perp = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B_0^2} \right)$$

- **A densidade de carga resultante do acumulo devido à deriva de polarização deve satisfazer a equação de continuidade de carga**

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J_P} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m}{B_0^2} \frac{d\mathbf{E_{0,\perp}}}{dt} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_P = -\frac{\rho_m}{B_0^2} \nabla \cdot \mathbf{E_{0,\perp}}$$

- **Escrevendo a densidade de carga total como** $\rho_{total} = \rho + \rho_P$ **nos permite escrever**

$$\nabla \cdot \mathbf{E_{0,\parallel}} + \nabla \cdot \mathbf{E_{0,\perp}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B_0^2} \nabla \cdot \mathbf{E_{0,\perp}} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \left[\epsilon_0 \mathbf{E_{0,\parallel}} + \epsilon_0 \left(1 + \frac{\rho_m}{\epsilon_0 B_0^2} \right) \mathbf{E_{0,\perp}} \right] = \rho \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E_0} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Plasmas como meios elétricos e magnéticos

- **Vamos estimar a magnitude da permissividade elétrica e permeabilidade magnética de um plasma de fusão de hidrogênio com parâmetros:**
  - *Densidade de plasma: 1 x 10^{20} m^{-3}*
  - *Temperatura do plasma: 1 x 10^{8} K ($W_\perp = 1/2mv_\perp^2 \approx k_B T/2 =$ 7 x 10^{-16} J)*
  - *Campo magnético: 1 T*
  - *Constantes físicas: m_i =1.67x10^{-27} kg, ϵ_0 = 8.85x10^{-12} F/m e μ_0 = 4π x10^{-7} H/m*

- **Permissividade elétrica do plasma perpendicular ao campo magnético**

$$\epsilon_\perp/\epsilon_0 = 1 + \frac{1.67\times10^{-27}\times1\times10^{20}}{8.85\times10^{-12}\times1^2} = 1 + 1.89\times10^4 \approx 1.89\times10^4 \gg 1$$

- **Permeabilidade magnética do plasma: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$ com $\mathbf{M} = -\,nW_\perp\mathbf{B}/B^2$**

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \textit{with} \quad \mu = \mu_0 \Big/ \left(1 + \frac{\mu_0 n W_\perp}{B^2}\right). \textit{ Portanto,} \quad \mu/\mu_0 = 1 \Big/ \left(1 + \frac{\mu_0 n W_\perp}{B^2}\right)$$

$$\mu/\mu_0 = 1 \Big/ \left(1 + \frac{4\pi\times10^{-7}\times1\times10^{20}\times7\times10^{-16}}{1^2}\right) = 1\Big/\left(1+8.8\times10^{-2}\right) \approx 1$$

Exercícios

- **Exercício do F.F. Chen:**
  - *2.14, 2.19 e 2.20*

- **Exercício do Bittencourt:**
  - *4.11*

Referências

- **F.F. Chen**
  - *Capítulo 2, seções 2.4 e 2.5*

- **Referência adicional**
  - *Bittencourt: Cap. 4*