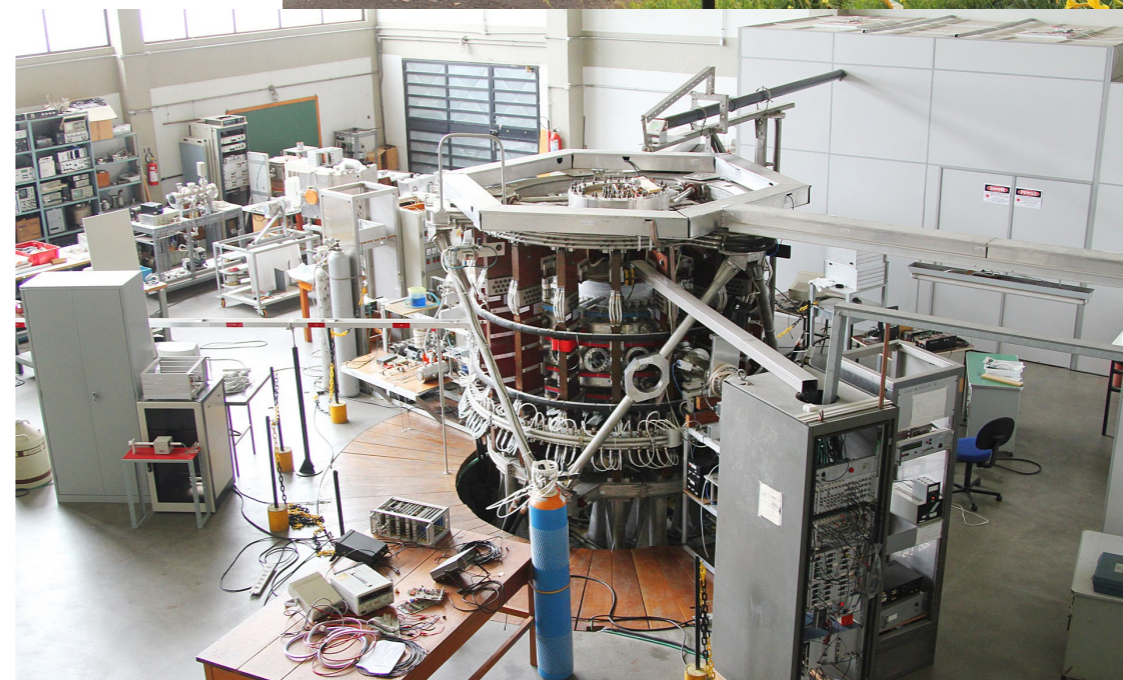


4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

Ministrado por
Prof. Gustavo Paganini Canal
Laboratório de Física de Plasmas
Departamento de Física Aplicada
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Curso de graduação ministrado
remotamente e oferecido pelo
**Instituto de Física da
Universidade de São Paulo**



e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 19 de Abril de 2021



- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: $\nabla B \perp \mathbf{B}$*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: curvatura de $|\mathbf{B}|$*
 - *A deriva gradiente-curvatura de \mathbf{B} combinada*

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: $\nabla B \perp \mathbf{B}$*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: curvatura de $|\mathbf{B}|$*
 - *A deriva gradiente-curvatura de \mathbf{B} combinada*

Deriva devido ao gradient de campo magnético (argumento físico)

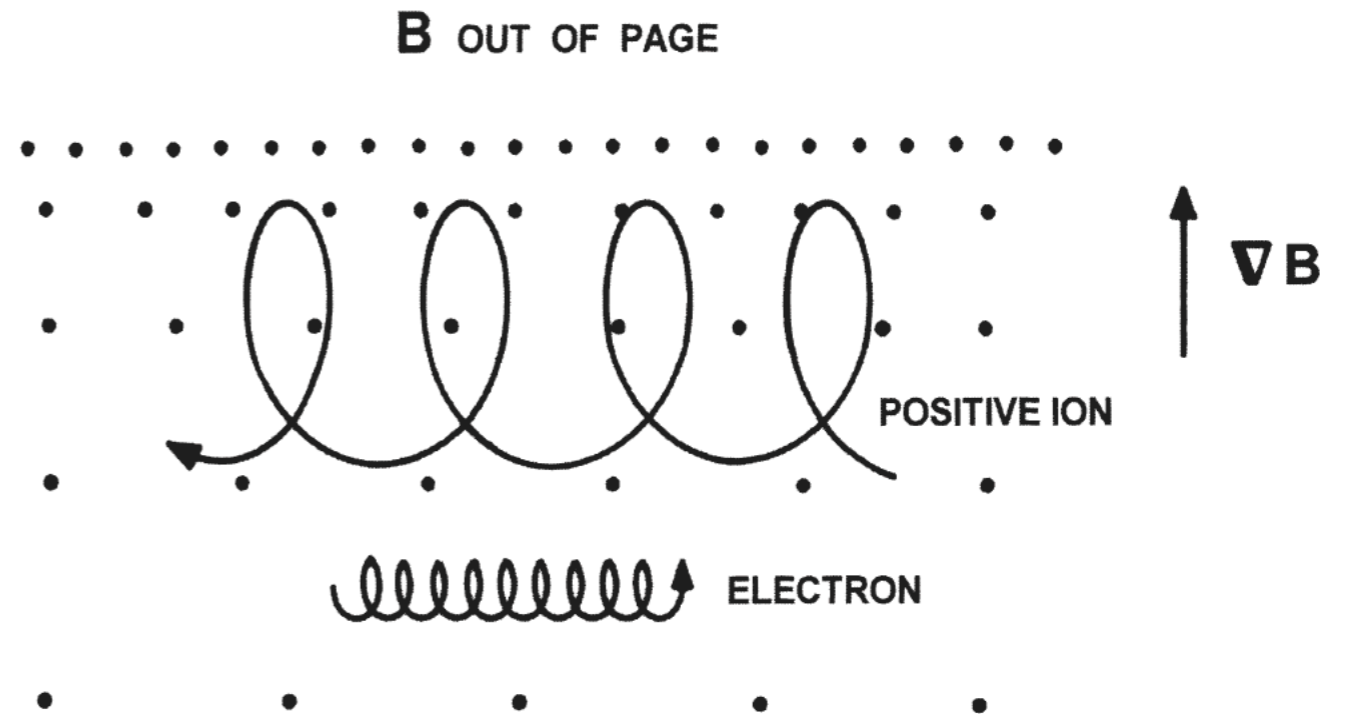
- Podemos esperar um movimento de deriva se o campo magnético variar de forma significativa ao longo do raio de Larmor

Raio de Larmor

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B_0}$$

Força magnética devido ao ∇B_0

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -|\boldsymbol{\mu}| \nabla B_0$$



- A deriva magnética associada ao gradiente do campo magnético (∇B_0) é

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2} = -\frac{|\boldsymbol{\mu}|}{q} \frac{\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

Deriva devido à curvatura do campo magnético (argumento físico)

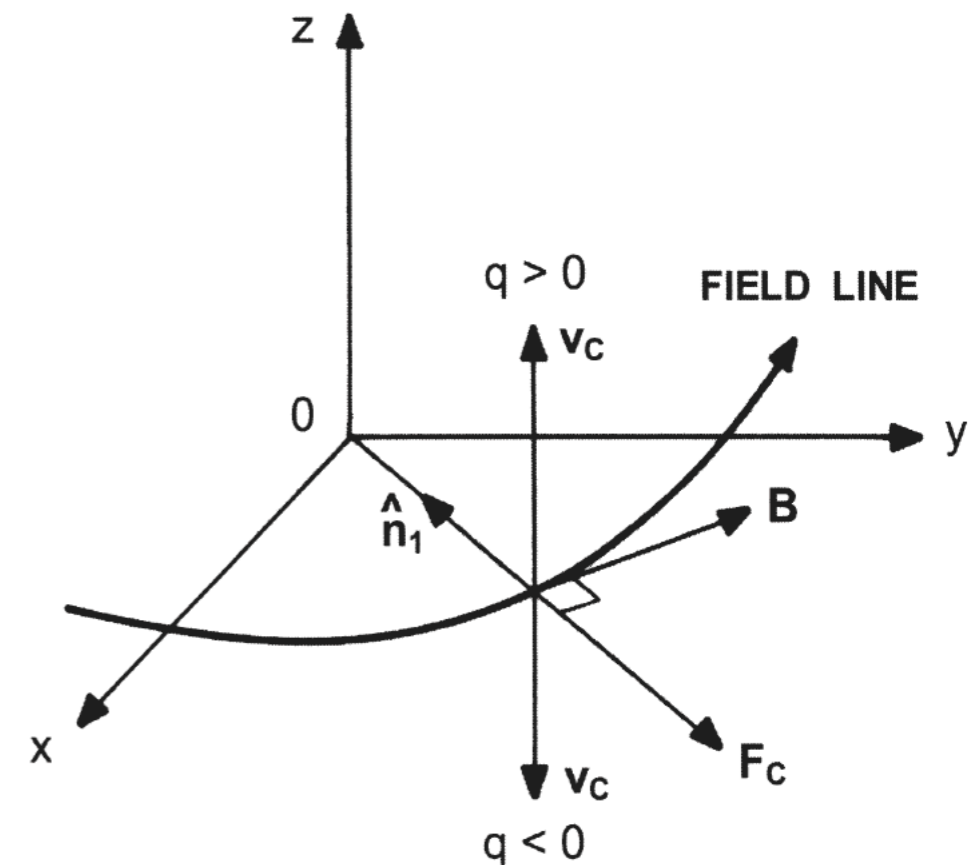
- Também podemos esperar um movimento de deriva se a direção do campo magnético variar de forma significativa ao longo do raio de Larmor

Força magnética devido à curvatura de \mathbf{B}_0

$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{mv_{\parallel}^2}{R} \hat{\mathbf{n}}_1$$

- Deriva magnética devido à curvatura de \mathbf{B}_0

$$\mathbf{v}_{\text{curv}} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{Rq} \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

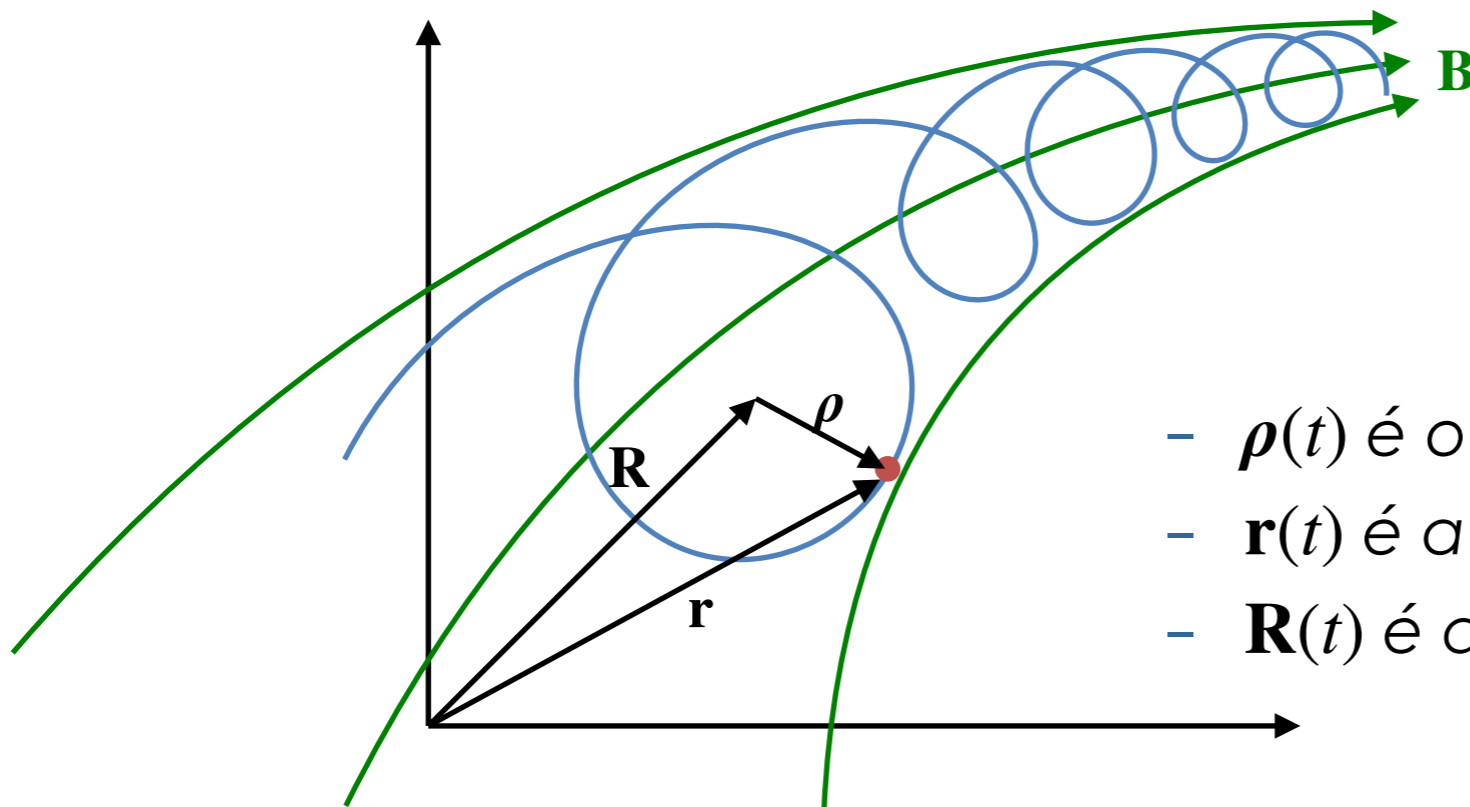


As derivas perpendiculares à B_0 : campos magnéticos não-uniformes

- Para estudar a trajetória de partículas carregadas em campos elétricos e magnéticos não-uniformes, temos que expandir o campo em torno de uma posição centrada com o movimento de Larmor, que é chamada de centro guia

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla]^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + O^3$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla]^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + O^3$$



$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$$

- $\boldsymbol{\rho}(t)$ é o raio de Larmor
- $\mathbf{r}(t)$ é a posição instantânea da partícula
- $\mathbf{R}(t)$ é a posição do centro guia

As derivas perpendiculares à \mathbf{B}_0 : campos magnéticos não-uniformes

- Para estudar a trajetória de partículas carregadas em campos elétricos e magnéticos não-uniformes, temos que expandir o campo em torno de uma posição centrada com o movimento de Larmor, que é chamada de centro guia

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) + [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \cdot \nabla]^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} + O^3$$

- Usando a definição da posição instantânea da partícula: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t)$
 - Portanto, o campo magnético, expandido até primeira ordem em $\boldsymbol{\rho}$, de modo que $|(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}|$, é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 + (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0$$

- Aqui, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{R})$ é o valor do campo na posição do centro guia $\mathbf{R}(t)$
- O termo de primeira ordem é $(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 = (\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla)\mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}$

As derivas perpendiculares à \mathbf{B}_0 : campos magnéticos não-uniformes

- No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, temos que a equação de movimento é

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v} \times [(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla)] \mathbf{B}_0$$

- Como o segundo termo do lado direito é de primeira ordem, comparado com o outro termo, vamos escrever a velocidade \mathbf{v} como,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0(t) + \mathbf{v}_1(t) = \frac{d\boldsymbol{\rho}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}_1}{dt}$$

onde \mathbf{v}_1 é de primeira ordem ($|\mathbf{v}_1| \ll |\mathbf{v}_0|$) e \mathbf{v}_0 é a solução da equação

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_0(t) = \boldsymbol{\Omega}_c \times \boldsymbol{\rho}_0(t) \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\Omega}_c = \boldsymbol{\Omega}_c \frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \quad \text{e} \quad \Omega_c = -\frac{qB_0}{m}$$

- Ignorando termos de segunda ordem, temos que a equação de movimento é

$$m \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = q\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{v}_0 \times [(\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \nabla)] \mathbf{B}_0$$

- O último termo, portanto, pode ser visto como uma força

As derivas perpendiculares à \mathbf{B}_0 : campos magnéticos não-uniformes

- Calculando a média temporal da equação de movimento perpendicular, para um período igual ao período de Larmor, usando

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{2\pi}{\Omega_c} \oint A(t) dt,$$

e tendo em vista que $\mathbf{v}_0(t) = \Omega_c \times \rho_0(t)$ e $\langle \mathbf{v}_0 \rangle = \langle \rho_0 \rangle = 0$, a equação de movimento torna-se (chamando $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$)

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{F} \rangle \quad \text{onde} \quad \langle \mathbf{F} \rangle = q \langle \mathbf{v}_0(t) \times [(\rho_0(t) \cdot \nabla)] \mathbf{B}_0 \rangle$$

- Separando nas direções paralela e perpendicular, com $\mathbf{u}_\perp = \text{const.}$, temos:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\parallel(t) + \mathbf{u}_\perp \quad \rightarrow \quad m \frac{d\mathbf{u}_\parallel}{dt} = \langle \mathbf{F}_\parallel \rangle \quad 0 = q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{F}_\perp \rangle$$

- Multiplicando a componente perpendicular da equação de movimento por \mathbf{B}_0 ($\times \mathbf{B}_0$), e sabendo que $(\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = -B_0^2 \mathbf{u}_\perp$, temos que

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2}$$

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: $\nabla B \perp \mathbf{B}$*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: curvatura de $|\mathbf{B}|$*
 - *A deriva gradiente-curvatura de \mathbf{B} combinada*

As derivas perpendiculares à \mathbf{B}_0 : campos magnéticos não-uniformes

- Escrevendo $\mathbf{B}_0 = B_x \hat{\mathbf{e}}_x + B_y \hat{\mathbf{e}}_y + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$, com $(B_z \gg B_x, B_y)$, e usando que

$$\mathbf{v}_0(t) = v_{\perp} \left[\hat{\mathbf{e}}_y \cos(\Omega_c t) - \hat{\mathbf{e}}_x \sin(\Omega_c t) \right] \quad \rho_0(t) = \rho \left[\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\Omega_c t) + \hat{\mathbf{e}}_y \sin(\Omega_c t) \right]$$

e substituindo na expressão da força $\langle \mathbf{F} \rangle = q \langle \mathbf{v}_0(t) \times [(\rho_0(t) \cdot \nabla)] \mathbf{B}_0 \rangle$, temos que

$$\langle \mathbf{F} \rangle = v_{\perp} \rho q \left\langle \left[\sin(\Omega_c t) \cos(\Omega_c t) \hat{\mathbf{e}}_y + \cos^2(\Omega_c t) \hat{\mathbf{e}}_x \right] \frac{\partial B_z}{\partial x} - \left[\sin(\Omega_c t) \cos(\Omega_c t) \frac{\partial B_y}{\partial x} + \sin^2(\Omega_c t) \frac{\partial B_y}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\Omega_c t) \cos(\Omega_c t) \frac{\partial B_x}{\partial y} + \cos^2(\Omega_c t) \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \hat{\mathbf{e}}_z + \left[\sin^2(\Omega_c t) \hat{\mathbf{e}}_y + \sin(\Omega_c t) \cos(\Omega_c t) \hat{\mathbf{e}}_x \right] \frac{\partial B_z}{\partial y} \right\rangle$$

- Tomando a média dessa equação, e lembrando que

$$\langle \sin(\Omega_c t) \cos(\Omega_c t) \rangle = 0 \quad \langle \sin^2(\Omega_c t) \rangle = \langle \cos^2(\Omega_c t) \rangle = \frac{1}{2}$$

obtemos

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{v_{\perp} \rho q}{2} \left[\frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right]$$

As derivas perpendiculares à \mathbf{B}_0 : campos magnéticos não-uniformes

- Usando que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

e que $v_{\perp} = \Omega_c \rho$, podemos escrever

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{v_{\perp}^2 q}{2\Omega_c} \left[\frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \right] = - \frac{mv_{\perp}^2}{2B_0} \nabla B_0 = - |\boldsymbol{\mu}| \nabla B_0$$

- Portanto, a deriva associada ao gradiente de é

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2} = - \frac{mv_{\perp}^2}{2q} \frac{\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^3}$$

- Note que a deriva devido ao gradiente de campo magnético depende da carga da partícula

– Isso leva ao aparecimento de uma corrente elétrica

$$\mathbf{J}_{\nabla B} = \frac{1}{\delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_{\nabla B, j} = - \left(\frac{1}{\delta V} \sum_j |\boldsymbol{\mu}_j| \right) \frac{\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

Invariantes adiabáticos: momento magnético e fluxo magnético

- Multiplicando a equação de movimento paralela por $u_{\parallel} = dz/dt$ fornece

$$mu_{\parallel} \frac{du_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = - \frac{W_{\perp}}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- Pela conservação da energia cinética ($W = W_{\parallel} + W_{\perp}$), temos que

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{W_{\perp}}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{W_{\perp}}{B_0} \frac{dB_0}{dt}$$

- Comparando o resultado anterior com a identidade abaixo

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp} B_0}{B_0} \right) = \frac{W_{\perp}}{B_0} \frac{dB_0}{dt} + B_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B_0} \right)$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B_0} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad |\mu| = \frac{W_{\perp}}{B_0} = \text{const}$$

- Da mesma forma, o fluxo magnético também se conserva

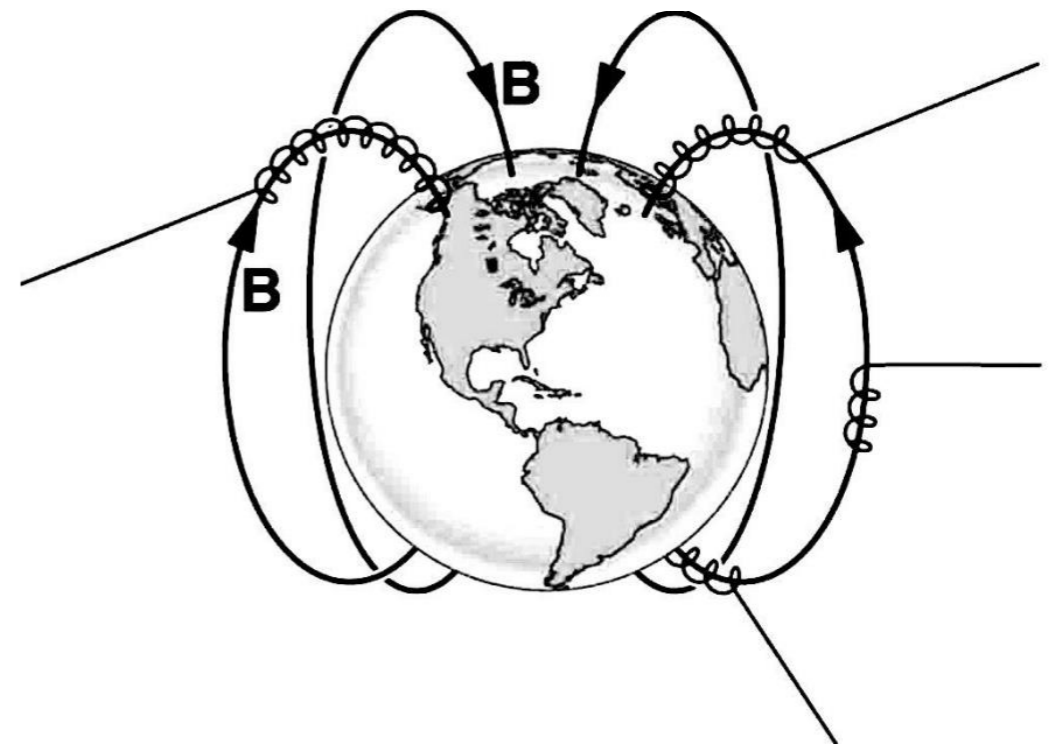
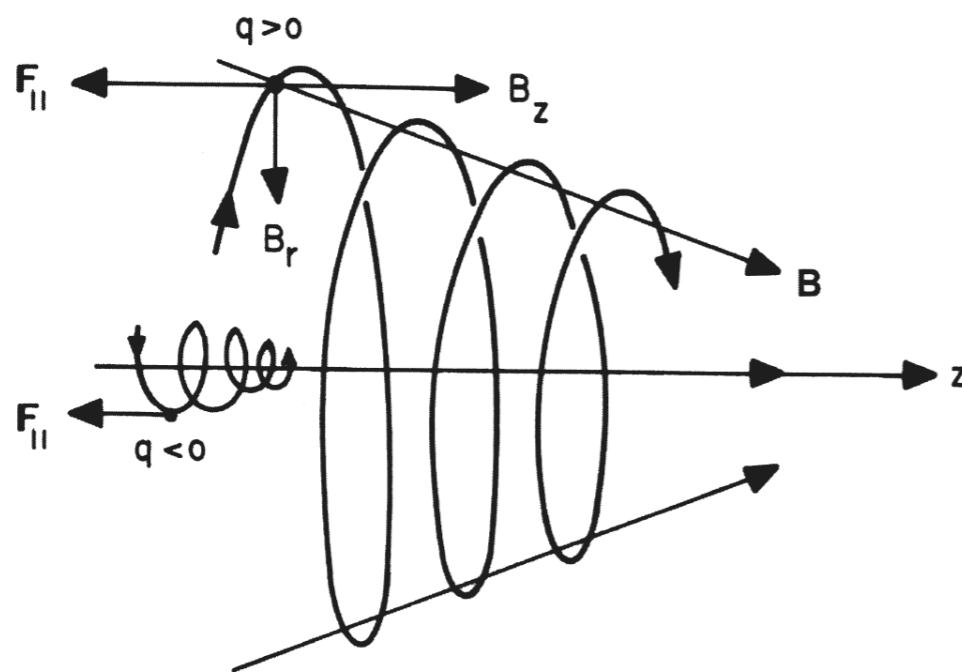
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} = \pi \rho^2 B_0 = \frac{2\pi m}{q^2} \left(\frac{W_{\perp}}{B_0} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B_0} \right) = 0$$

Força magnética paralela ao campo magnético

- A deriva magnética na direção paralela é dada por

$$m \frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} = - |\boldsymbol{\mu}| \nabla_{\parallel} B_0$$

- Partículas carregadas tendem a evitar regiões de alto campo magnético

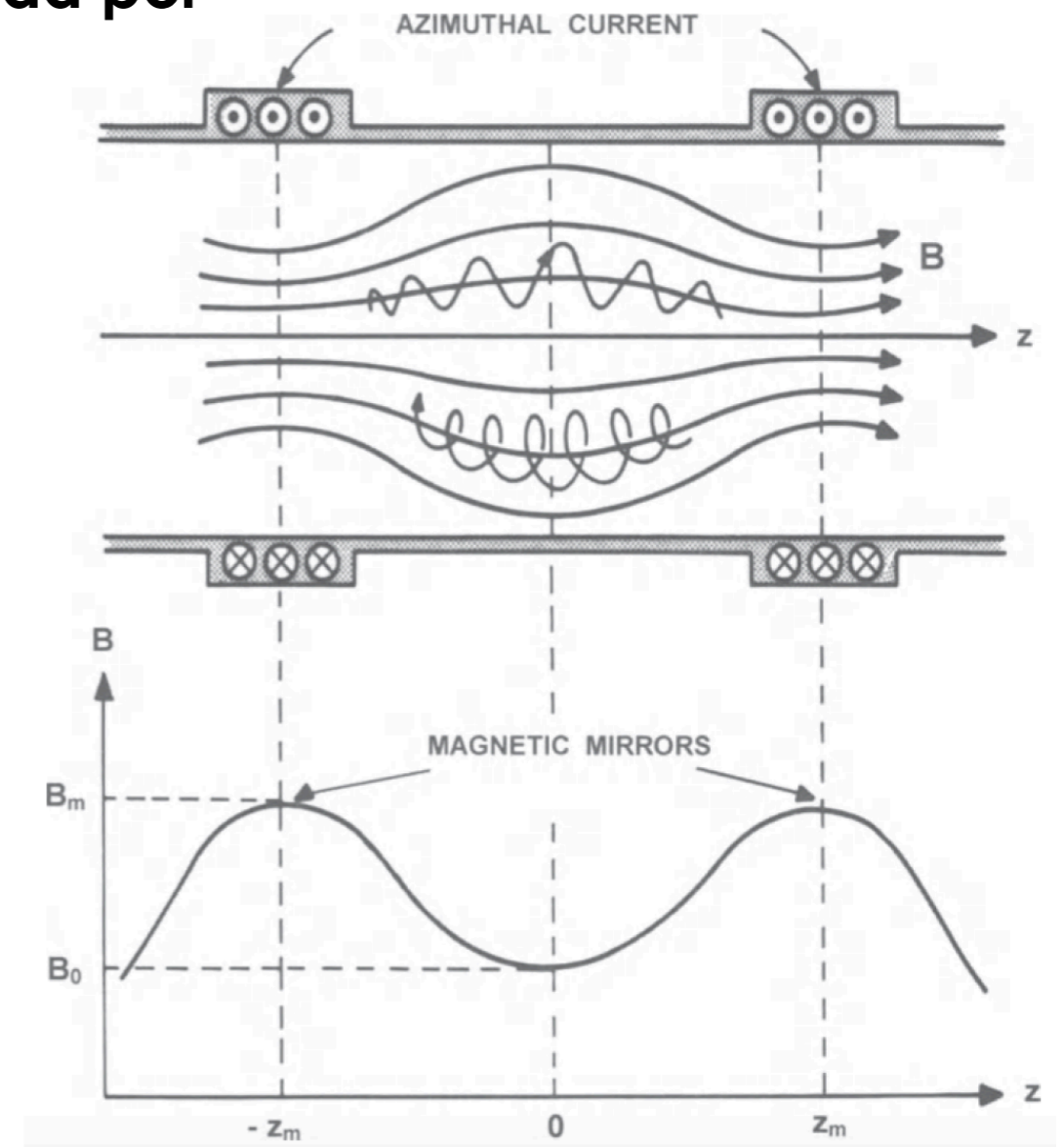


Força magnética paralela ao campo magnético

- A deriva magnética na direção paralela é dada por

$$m \frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} = - |\boldsymbol{\mu}| \nabla_{\parallel} B_0$$

- Partículas carregadas tendem a evitar regiões de alto campo magnético
- Os primeiros dispositivos de confinamento magnético usaram este efeito para aprisionar partículas em regiões localizadas do espaço
- Tais dispositivos são comumente chamados de garrafas magnéticas ou máquinas espelho



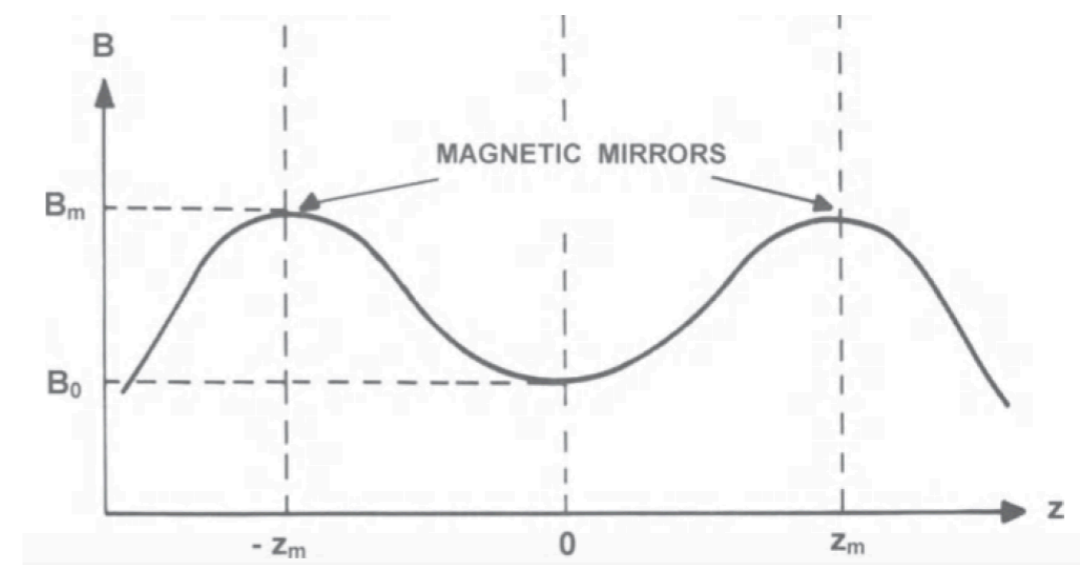
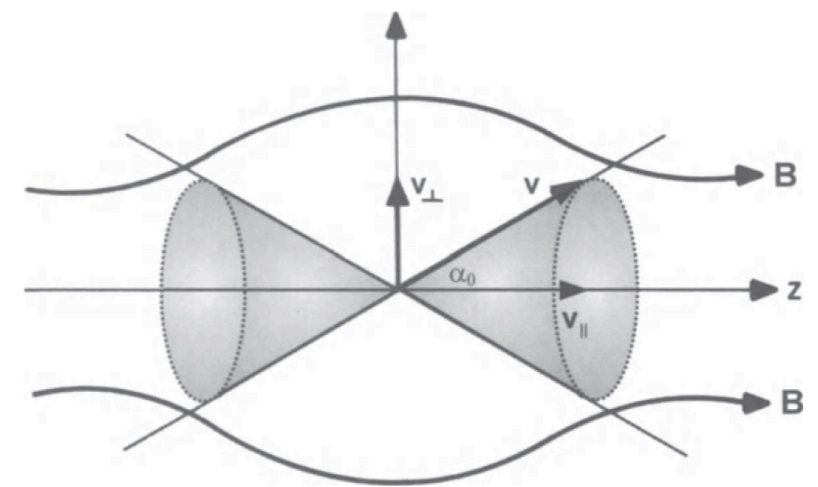
Máquinas espelho

Força magnética paralela ao campo magnético

- A deriva magnética na direção paralela é dada por

$$m \frac{d\mathbf{u}_{\parallel}}{dt} = - |\boldsymbol{\mu}| \nabla_{\parallel} B_0$$

- Partículas carregadas tendem a evitar regiões de alto campo magnético
 - Os primeiros dispositivos de confinamento magnético usaram este efeito para aprisionar partículas em regiões localizadas do espaço
 - Tais dispositivos são comumente chamados de garrafas magnéticas ou máquinas espelho
- **Exercício: mostre que partículas podem escapar da garrafa magnética pelos "gargalos" caso o ângulo de ataque no centro do dispositivo, α_0 , seja**



$$\alpha_0 < \sin^{-1} \left[\left(\frac{B_0}{B_m} \right)^{1/2} \right] = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v} \right) \Big|_{z=0}$$

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: $\nabla B \perp \mathbf{B}$*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: curvatura de $|\mathbf{B}|$*
 - *A deriva gradiente-curvatura de \mathbf{B} combinada*

Deriva devido à curvatura do campo magnético (argumento físico)

- Também podemos esperar um movimento de deriva se a direção do campo magnético variar de forma significativa ao longo do raio de Larmor

Força centrífuga devido à curvatura de \mathbf{B}_0

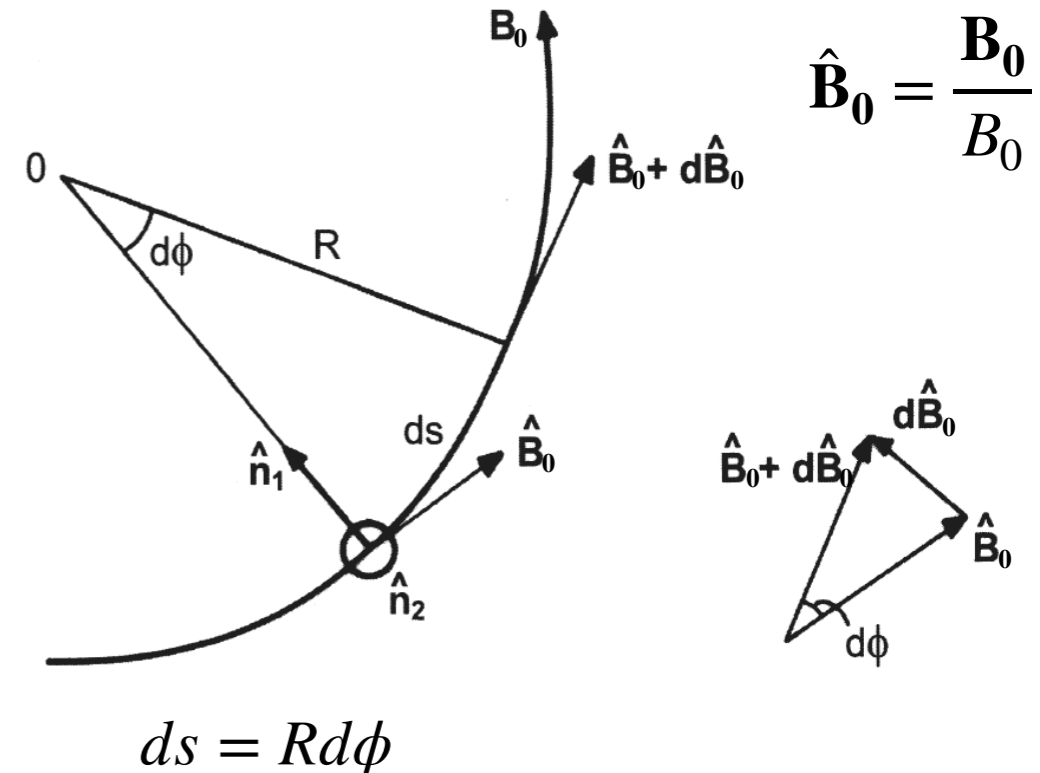
$$\langle \mathbf{F} \rangle = -\frac{mv_{\parallel}^2}{R} \hat{\mathbf{n}}_1$$

- Deriva magnética devido à curvatura de \mathbf{B}_0

$$\mathbf{v}_{\text{curv}} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{Rq} \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

- Usando $\frac{\hat{\mathbf{n}}_1}{R} = (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}}_0 = \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0}{B_0^2}$ temos que

$$\mathbf{v}_{\text{curv}} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^4}$$



$$|d\hat{\mathbf{B}}_0| = |\hat{\mathbf{B}}_0| d\phi$$

$$d\hat{\mathbf{B}}_0 = \hat{\mathbf{n}}_1 d\phi$$

$$\frac{\hat{\mathbf{n}}_1}{R} = \frac{d\hat{\mathbf{B}}_0}{ds} = (\hat{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla) \hat{\mathbf{B}}_0$$

Densidade de corrente devido ao gradiente de campo magnético

- Note que, assim como a deriva devido ao gradiente do campo magnético, a deriva devido à curvatura do campo magnético também depende da carga elétrica e da massa da partícula
 - Isso leva ao aparecimento de uma corrente elétrica

$$\mathbf{J}_{\text{curv}} = \frac{1}{\delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_{\text{curv},j} = -2 \left(\frac{1}{\delta V} \sum_j W_{\parallel,j} \right) \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0}{B_0^4}$$

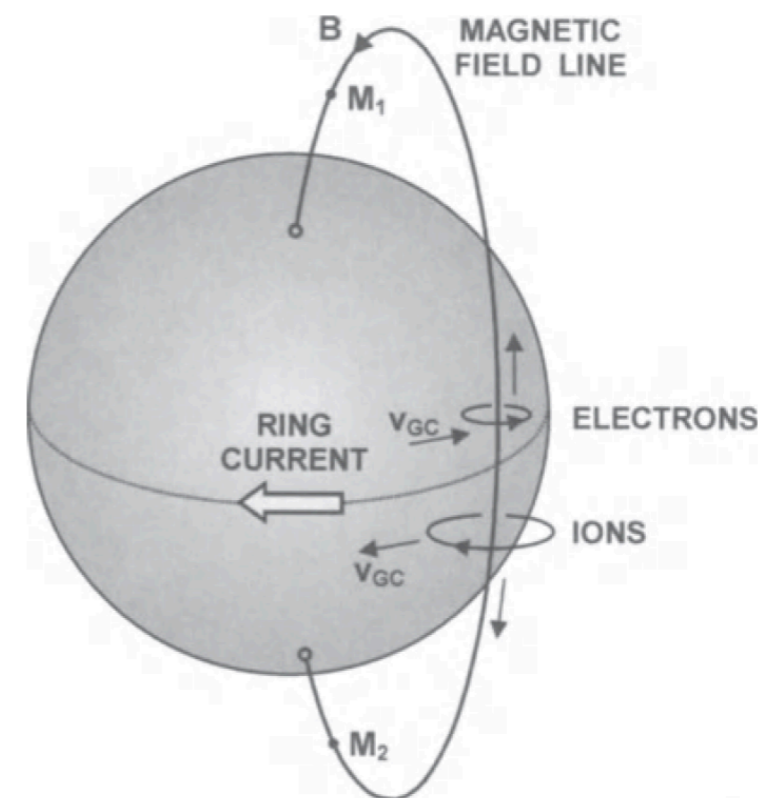
4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: $\nabla B \perp \mathbf{B}$*
 - *Campo magnético estático e não-uniforme: curvatura de $|\mathbf{B}|$*
 - *A deriva gradiente-curvatura de \mathbf{B} combinada*

A deriva curvatura-gradiente combinada

- As derivas de curvatura e de gradiente sempre aparecem juntas devido a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- Essas duas derivas, por tanto, podem ser combinadas numa equação única
- Exercício: mostre que as derivas de curvatura e gradiente do campo magnético podem ser combinadas (que suposição deve ser feita?):

$$\mathbf{v}_{CG} = -\frac{m}{qB_0^3} \left(v_{0,\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{0,\perp}^2 \right) (\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0)$$



Exercício: A corrente elétrica anular (ring current) da Terra

- Suponha que o campo magnético terrestre possa ser aproximado pelo campo de um dipolo com $B_0 = 3.12 \times 10^{-5} T$:

$$B_r = -2B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \cos \theta$$

$$B_\theta = -B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \sin \theta$$

$$R_E = 6370 \text{ km} \quad (\text{Raio da Terra})$$

Descreva a trajetória de cargas à $h = 300 \text{ km}$ e calcule a densidade de corrente

Suponha que $n(h = 300 \text{ km}) = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ e

$\rho_m(h = 300 \text{ km}) = 2.67 \times 10^{-17} \text{ kg/m}^{-3}$ (O^+)

Figura 3.18 e 3.19 (Bittencourt)

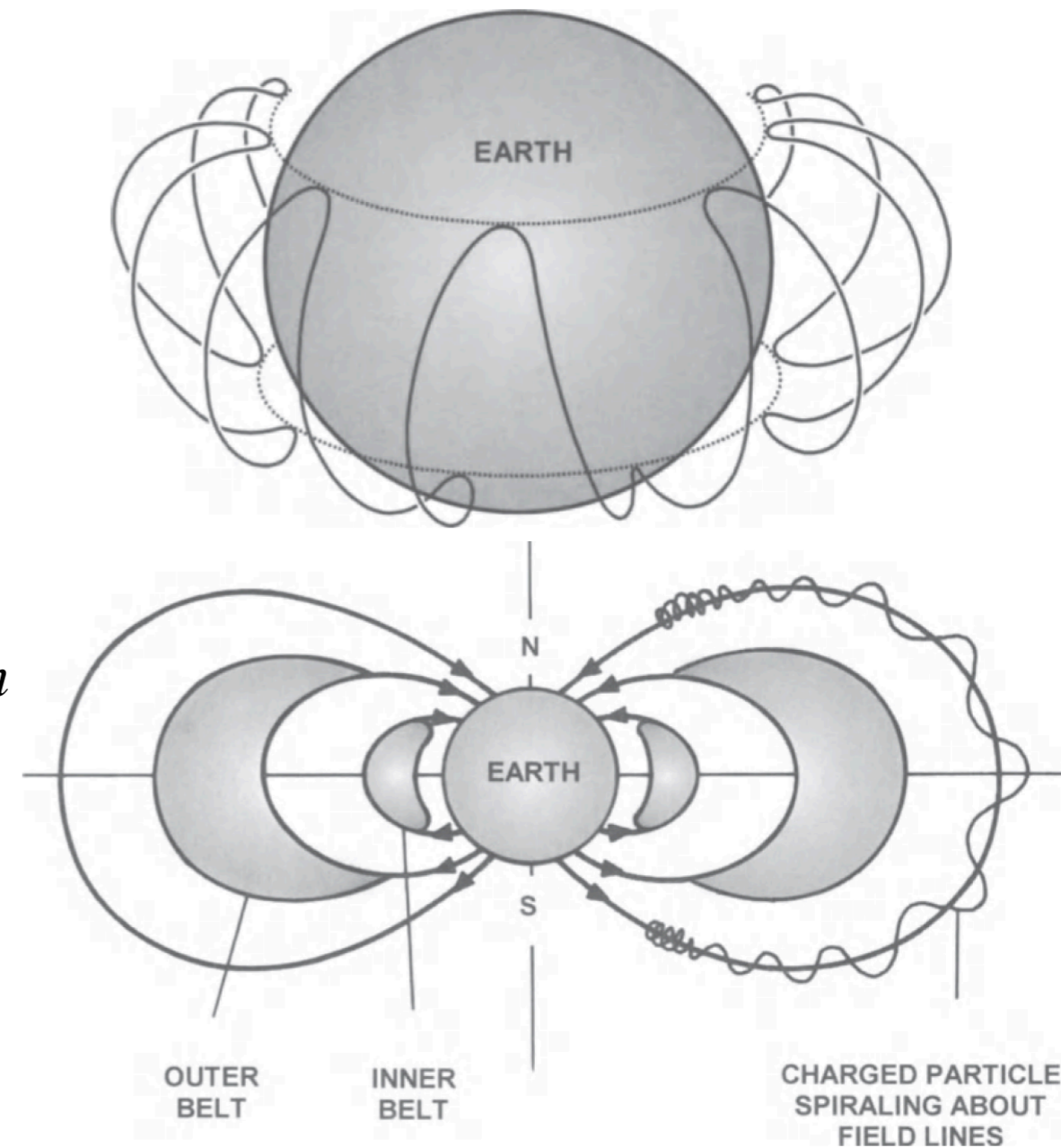


Figura 3.14 (Bittencourt)

Exercício: A corrente elétrica anular (ring current) da Terra

- Suponha que o campo magnético terrestre possa ser aproximado pelo campo de um dipolo com $B_0 = 3.12 \times 10^{-5} T$:

$$B_r = -2B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \cos \theta$$

$$B_\theta = -B_0 \left(\frac{R_E}{R_E + h} \right)^3 \sin \theta$$

$$R_E = 6370 \text{ km} \quad (\text{Raio da Terra})$$

Descreva a trajetória de cargas à $h = 300 \text{ km}$ e calcule a densidade de corrente

Suponha que $n(h = 300 \text{ km}) = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3} \text{ e}$

$\rho_m(h = 300 \text{ km}) = 2.67 \times 10^{-17} \text{ kg/m}^{-3} \text{ (O}^+)$

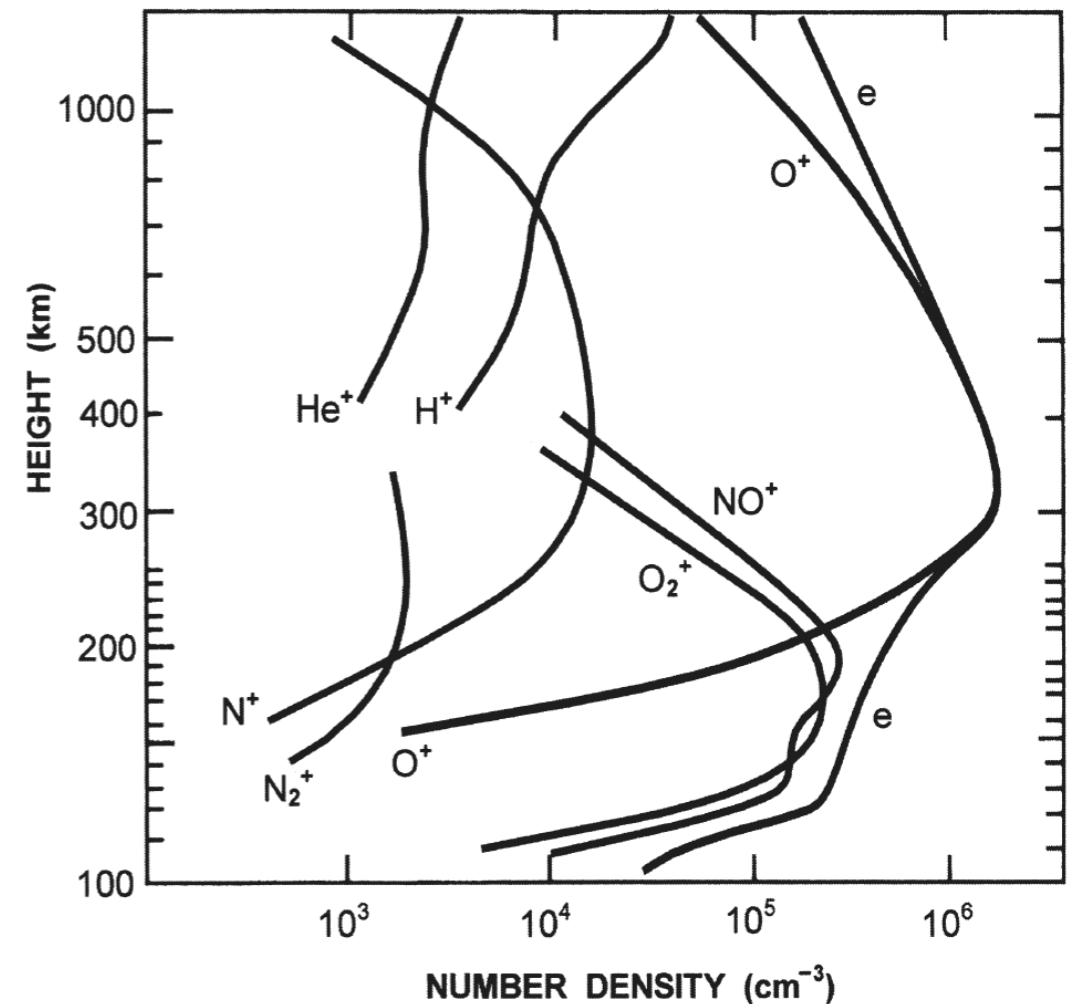


Figura 1.5 (Bittencourt)

Exercícios

- **Exercício do F.F. Chen:**
 - 2.8, 2.9 e 2.11

- **Exercício do Bittencourt:**
 - 3.2, 3.5 e 3.6

Referências

- **F.F. Chen**
 - *Capítulo 2, seção 2.3*
- **Referência adicional**
 - *Bittencourt: Cap. 3*