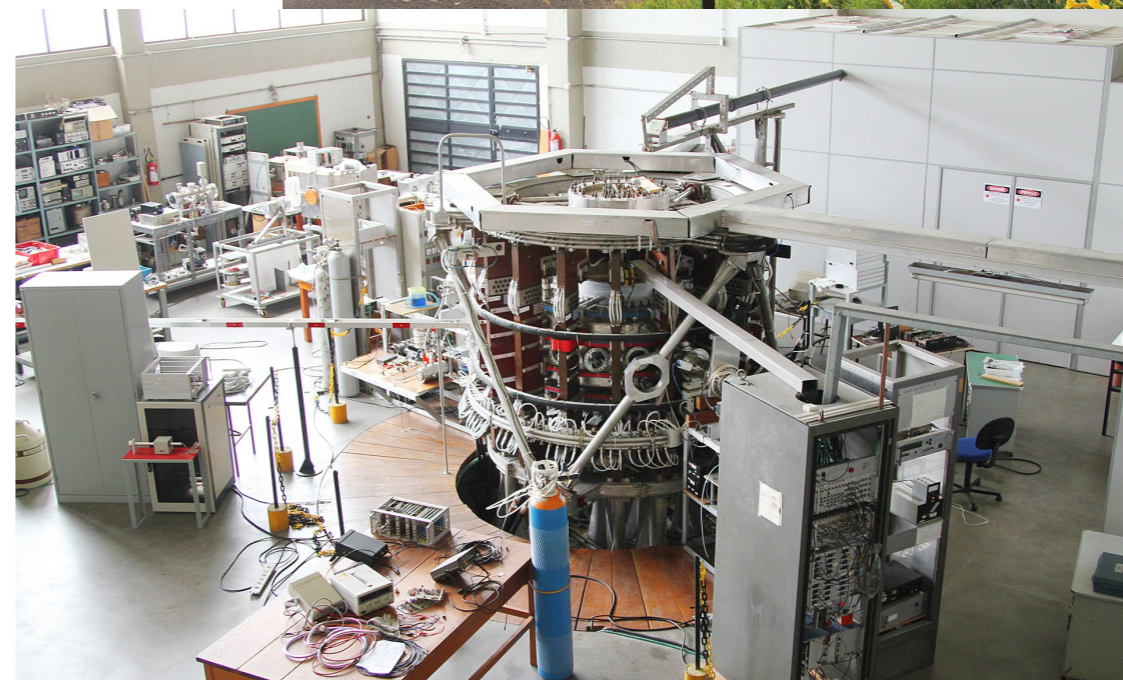


4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

Ministrado por
Prof. Gustavo Paganini Canal
Laboratório de Física de Plasmas
Departamento de Física Aplicada
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Curso de graduação ministrado
remotamente e oferecido pelo
**Instituto de Física da
Universidade de São Paulo**



e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 14 de Abril de 2021



4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo elétrico estático e uniforme*
 - *Campo magnético estático e uniforme*
 - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo elétrico estático e uniforme*
 - *Campo magnético estático e uniforme*
 - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria relativística de órbitas de partículas: introdução

- Conhecer a trajetória de partículas carregadas em campos EMs é importante, pois nos dá informação sobre a física de alguns processos dinâmicos
- Aqui, estamos interessados no movimento de partículas carregadas na presença de campos elétricos (**E**) e magnéticos (**B**) em função de **r** e **t**
 - Portanto, os campos não são afetados pelas partículas carregadas
- A equação relativística de movimento para uma partícula carregada sob a ação da força de Lorentz devido aos campos **E** e **B** é

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Aqui, $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ é o momento relativístico da partícula, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

q e m_0 são a carga e a massa de repouso da partícula, respectivamente

$c = 2.99 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo

A teoria clássica/não-relativística de órbitas de partículas: introdução

- **Em muitas situações de interesse prático, o termo $v^2/c^2 \ll 1$**
 - Nessas situações, $\gamma \approx 1$ e $m = \gamma m_0 \approx m_0$ pode ser considerada constante
- **Efeitos relativísticos são importantes apenas para partículas de alta energia**
 - Um próton de 1 MeV tem $v = 1.4 \times 10^7$ m/s, ou seja, $v^2/c^2 = 0.002 \ll 1$
 - Aqui, efeitos radiativos, que são efeitos relativísticos, serão desprezados

- **Nessas situações, a equação de movimento se reduz à**

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- **Se a velocidade obtida com esta equação não satisfizer a condição $v^2/c^2 \ll 1$, então a equação relativística do movimento deve ser usada em seu lugar**

A teoria clássica de órbitas de partículas: introdução

- Vamos considerar a energia cinética da partícula:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

- Usando a equação de movimento, esta equação torna-se

$$\frac{dW}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = q (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) + \cancel{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}} = q (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})$$

- Da equação acima, conclui-se que

- Qualquer mudança na energia cinética da partícula se dá apenas pela presença de campos elétricos
- Campos magnéticos não realizam trabalho sobre partículas carregadas, ou seja, a energia cinética da partícula se conserva quando há apenas um campo magnético

A teoria de órbitas de partículas: um modelo de primeiros princípios

- Equações de movimento de uma carga (de tipo j) em um campo EM:

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j$$

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{F}_j = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B})$$

- Equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Relações constitutivas

$$\rho = \rho_{ext} + \rho_{plasma} = \rho_{ext} + \sum_j q_j \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{plasma}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{ext} + \mathbf{J}_{plasma} = \mathbf{J}_{ext} + \sum_j q_j \mathbf{v}_j(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{plasma}$$

A teoria de órbitas de partículas: um modelo de primeiros princípios

- **A teoria da órbitas de partículas é um modelo auto-consistente bem definido para descrever plasmas, no entanto, este modelo tem limitações na prática**
 - O grande número de partículas ($\sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$) torna esse modelo inviável
 - A quantidade informação nesse model é desnecessariamente grande:
(# de partículas) x (3 posições) x (3 velocidades) x (# de passos temporais)
- **Para simplificar esse modelo, a resposta/reação das partículas aos campos EM das outras partículas é desprezada ($E_{\text{ext}} \gg E_{\text{plasma}}$ and $B_{\text{ext}} \gg B_{\text{plasma}}$)**
 - A trajetória da partícula carregada é, portanto, determinada SOMENTE pelos campos EM aplicados externamente
 - Este modelo despreza efeitos coletivos (não é adequado para plasmas)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \cancel{\mathbf{E}_{\text{plasma}}}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \cancel{\mathbf{B}_{\text{plasma}}}$$

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j$$

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = q_j \left(\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}_{\text{ext}} \right)$$

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo elétrico estático e uniforme*
 - *Campo magnético estático e uniforme*
 - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria de órbitas de partículas: campo elétrico estático e uniforme

- Partículas carregadas em campos EMs aplicados externamente estão sujeitas à força de Lorentz

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}})$$

- No caso em que $\mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E}_0$ é estático e uniforme, temos que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0$$

- A solução desta equação é obtida por integração direta

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int_0^t \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 dt \quad \rightarrow \quad \int_{\mathbf{v}(0)}^{\mathbf{v}(t)} d\mathbf{v} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 t$$

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^t \mathbf{v}(0) dt + \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \int_0^t t dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{q}{2m} \mathbf{E}_0 t^2$$

(Movimento Uniformemente Acelerado)

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo elétrico estático e uniforme*
 - *Campo magnético estático e uniforme*
 - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

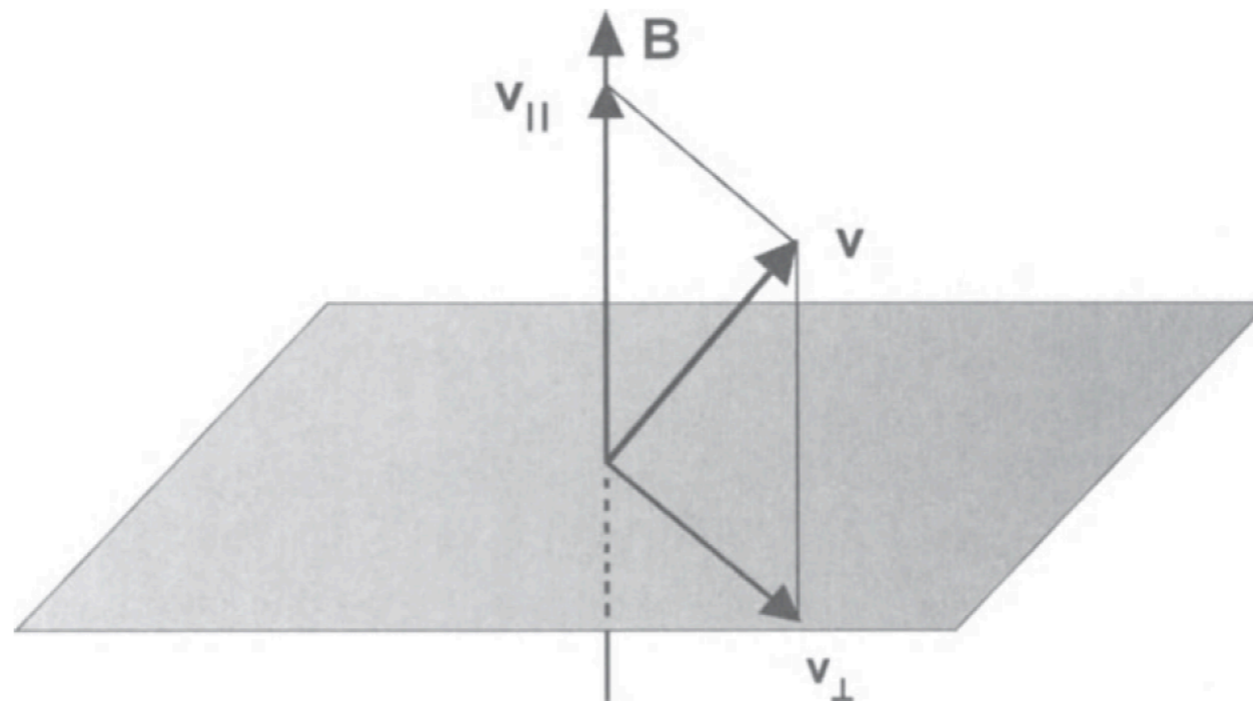
A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

- No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_0$ é estático e uniforme, temos que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

- Decompondo \mathbf{v} em suas componentes paralela e perpendicular: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 \quad (\text{O termo } \mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}_0 = 0, \text{ pois } \mathbf{v}_{\parallel} \parallel \mathbf{B}_0)$$



***As direções paralela e perpendicular são sempre definidas com relação a \mathbf{B}_0 ***

A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

- No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_0$ é estático e uniforme, temos que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$$

- Decompondo \mathbf{v} em suas componentes paralela e perpendicular: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 \quad (\text{O termo } \mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}_0 = 0, \text{ pois } \mathbf{v}_{\parallel} \parallel \mathbf{B}_0)$$

- Na direção paralela: movimento retilíneo uniforme

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v}_0$$

- Na direção perpendicular: movimento ciclotrônico

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0$$

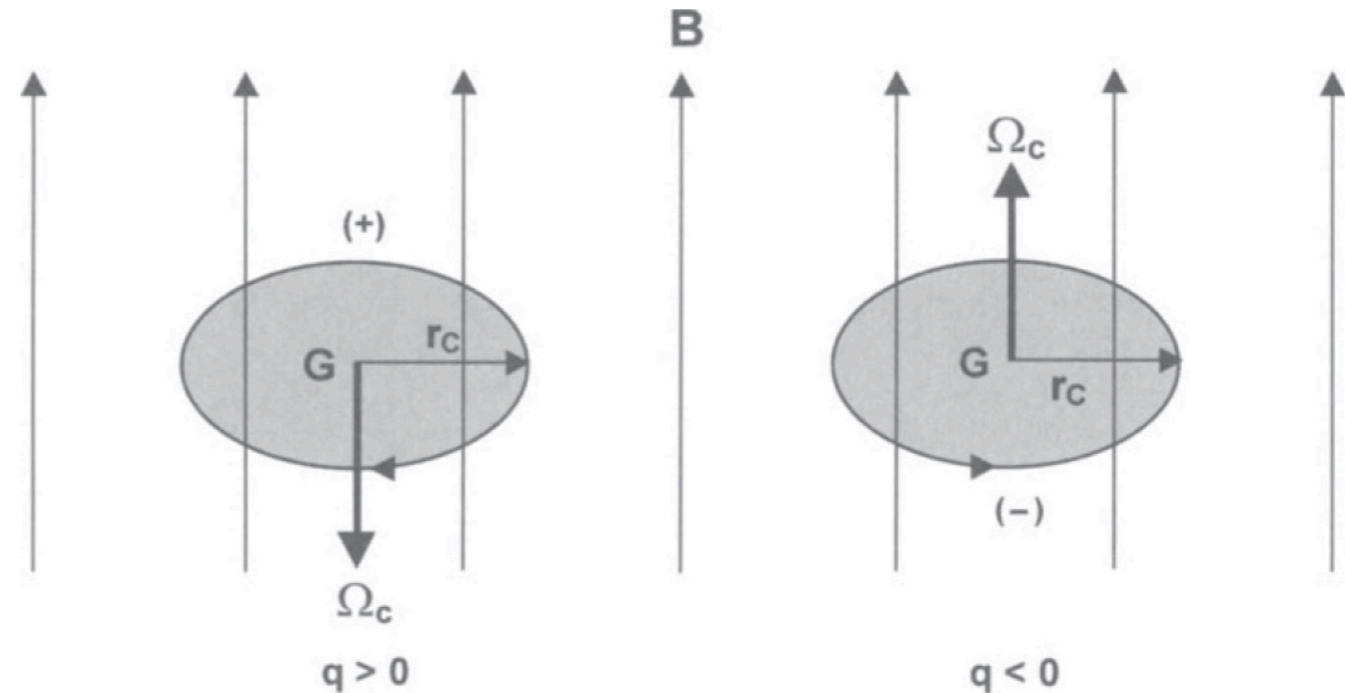
- Definindo $\mathbf{\Omega}_c = -\frac{q}{m} \mathbf{B}_0$, a equação de movimento torna-se: $\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \mathbf{\Omega}_c \times \mathbf{v}_{\perp}$

A frequência ciclotrônica (frequência de giro ou girofrequência)

- A quantidade $\Omega_c = -\frac{q}{m}\mathbf{B}_0$ é chamada de frequência ciclotrônica, frequência de giro ou de girofrequência

(Equação de movimento)

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{v}_\perp$$



- A direção de $\boldsymbol{\Omega}_c$ é definida como a direção que gera um efeito diamagnético
 - $\boldsymbol{\Omega}_c$ é oposto ao \mathbf{B}_0 para uma carga positiva ($q > 0$), e esta move-se de modo a produzir um campo magnético oposto ao \mathbf{B}_0 (efeito diamagnético)
 - $\boldsymbol{\Omega}_c$ aponta na direção de \mathbf{B}_0 para uma carga negativa ($q < 0$), e esta também se move de modo a produzir um campo magnético oposto ao \mathbf{B}_0
 - Note que $\boldsymbol{\Omega}_c$ sempre aponta na direção do momento angular da partícula

O raio de Larmor (ou raio de giro)

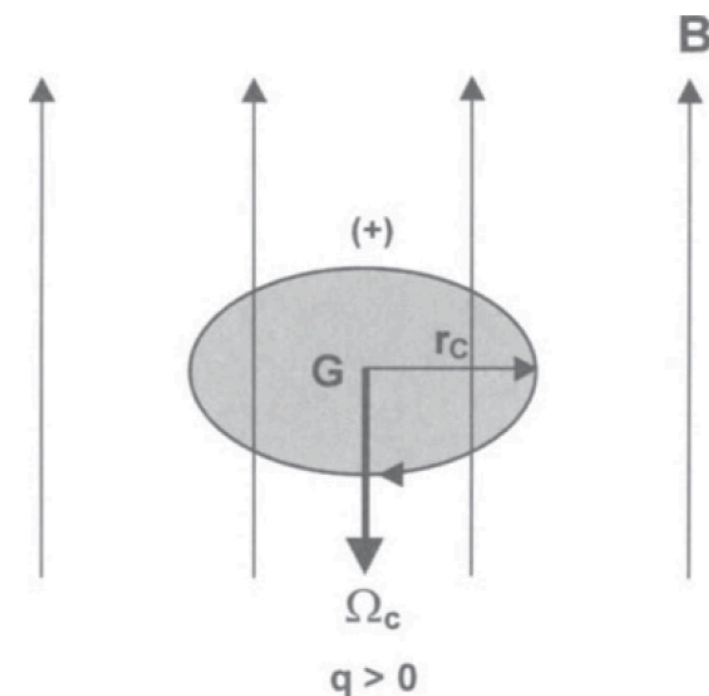
- Como Ω_c é constante, e a energia cinética se conserva, $|\mathbf{v}_\perp|$ também é constante, e a equação de movimento implica que
 - A aceleração da partícula é constante em magnitude
 - Sua direção é perpendicular tanto à \mathbf{v}_\perp quanto \mathbf{B}_0

- Portanto, a equação de movimento pode ser integrada diretamente

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \Omega_c \times \mathbf{v}_\perp = \Omega_c \times \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_\perp(t) = \Omega_c \times \mathbf{r}_c(t)$$

- Aqui, \mathbf{r}_c é um vetor posição da partícula, medido com relação à um dado ponto (G - na figura)
- O vetor \mathbf{r}_c gira num plano perpendicular ao \mathbf{B}_0
- Como $|\mathbf{v}_\perp|$ é constante, $|\mathbf{r}_c|$ também é constante

- O vetor \mathbf{r}_c é chamado de raio de Larmor ou raio de giro



G é o centro de giro ou centro guia

Movimento ciclotrônico em coordenadas cartesianas

- Vamos supor que o campo magnético $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$. Portanto, $\mathbf{v}_{\parallel} = v_{0,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_z$ e

$$\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 = B_0(v_y \hat{\mathbf{e}}_x - v_x \hat{\mathbf{e}}_y) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y) = \frac{qB_0}{m} (v_y \hat{\mathbf{e}}_x - v_x \hat{\mathbf{e}}_y)$$

- Decompondo nas direções x e y:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_y = \Omega_c v_y \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_x = -\Omega_c v_x$$

- Tomando a derivada temporal da equação x e substituindo na equação y:

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \Omega_c^2 v_x = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = v_{0,\perp} \sin(\omega_c t + \theta_0)$$

- Substituindo esse expressão para v_x na equação y, temos

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \Omega_c^2 v_y = 0 \quad \rightarrow \quad v_y = v_{0,\perp} \cos(\omega_c t + \theta_0)$$

Movimento ciclotrônico em coordenadas cartesianas

- Integrando as equações de movimento, temos as equações da trajetória da partícula no campo magnético

$$x(t) = X_0 - \frac{v_{0,\perp}}{\Omega_c} \cos(\Omega_c t + \theta_0)$$

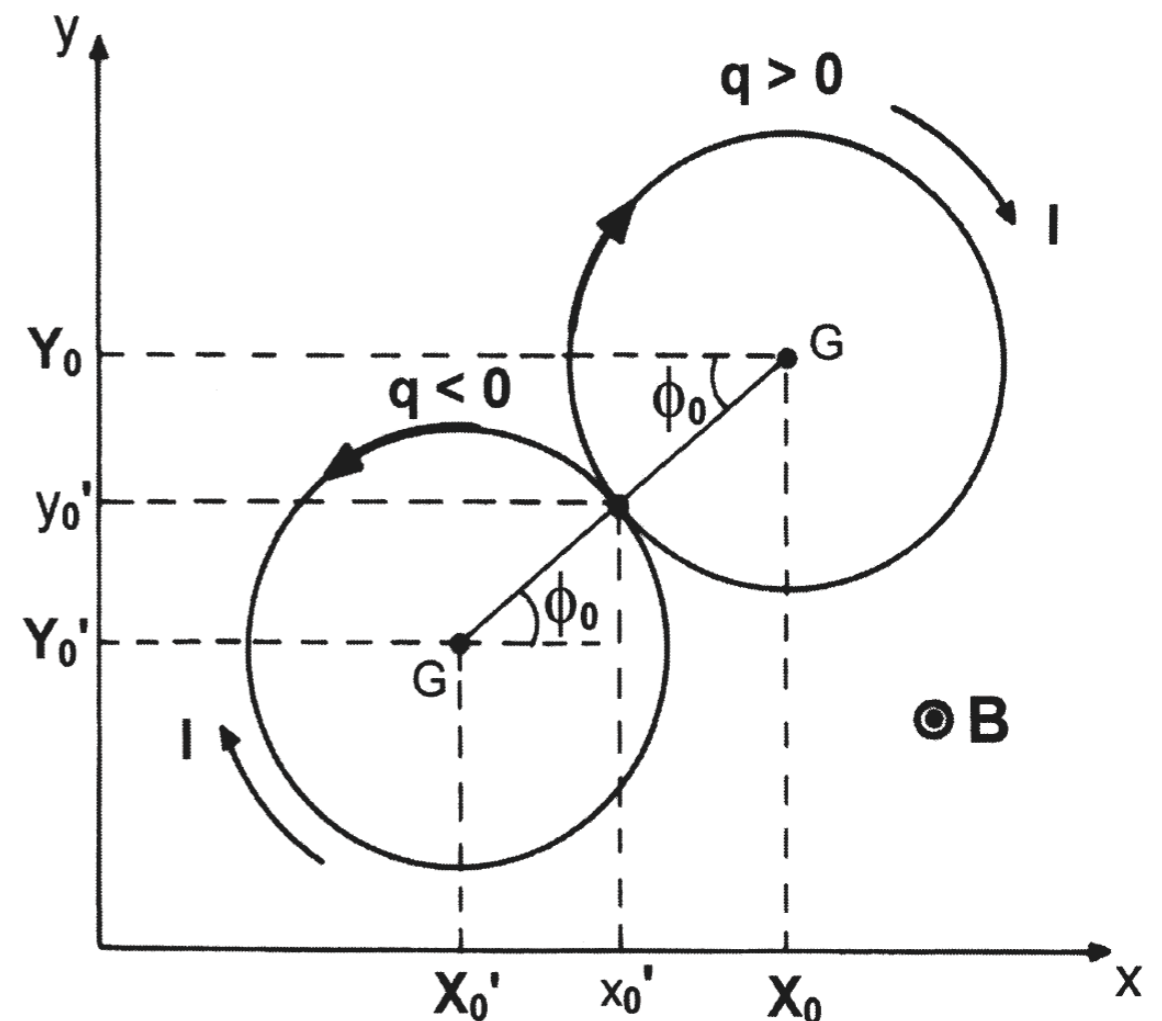
$$y(t) = Y_0 + \frac{v_{0,\perp}}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t + \theta_0)$$

$$z(t) = z_0 + v_{0,\parallel} t$$

- Note que

$$(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\Omega_c} \right)^2 = r_c^2$$

(Equação de um círculo de raio r_c
com centro em X_0 e Y_0)



Frequência ciclotrônica e raio de Larmor: ordem de grandeza

- **Raio de Larmor:** $r_c = v_{\perp} / \Omega_c = \frac{m v_{\perp}}{|q| B_0}$ Podemos estimar: $v_{\perp} \approx v_{th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$
- **Frequência ciclotrônica:** $\Omega_c = |q| B_0 / m$
 - Eletrociclotrônica: $f_{ce} = \Omega_{ce} / 2\pi = 28.0 \times B_0$ (GHz)
 - Ionociclotrônica: $f_{ci} = \Omega_{ci} / 2\pi = 15.2 \times B_0$ (MHz)
- **Frequência ciclotrônica e raio de Larmor em plasmas**
 - Tokamaks ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg; $B_0 = 1.5$ T; $T = 1 \times 10^8$ K)
 $f_{ce} = 42$ GHz, $f_{ci} = 22.8$ MHz, $r_{ce} = 0.15$ mm e $r_{ci} = 6.3$ mm
 - Coroa solar ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg; $B_0 = 0.1$ T; $T = 1 \times 10^6$ K)
 $f_{ce} = 2.8$ GHz, $f_{ci} = 1.5$ MHz, $r_{ce} = 0.22$ mm e $r_{ci} = 9.5$ mm
- **Quando $r_{ce}, r_{ci} \ll L$ (dimensão do plasma), elétrons/ions estão "magnetizados"**

A teoria de órbitas de partículas: campo magnético estático e uniforme

- A trajetória da partícula é dada pela superposição de um movimento retilíneo uniforme ao longo de B_0 e um movimento ciclotrônico perpendicular a B_0

- A trajetória da partícula descreve uma hélice

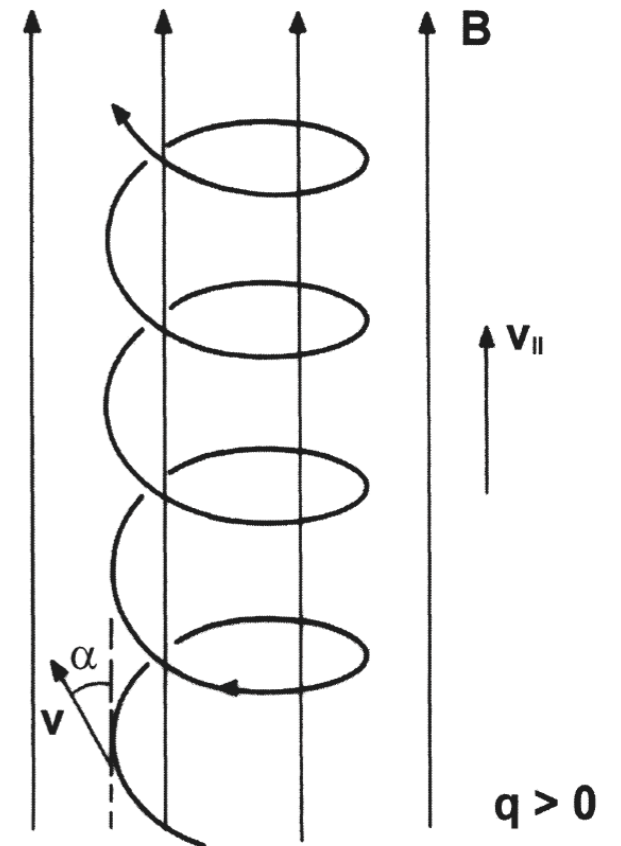
- O ângulo entre B_0 e a direção da velocidade da partícula é chamado de ângulo de inclinação (ou de ataque)

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \right)$$

- Aqui, $v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$ é o módulo da velocidade \mathbf{v}

- Quando $v_{\parallel} = 0$ e $v_{\perp} \neq 0$, temos $\alpha = \pi/2$ (Movimento circular/ciclotrônico)

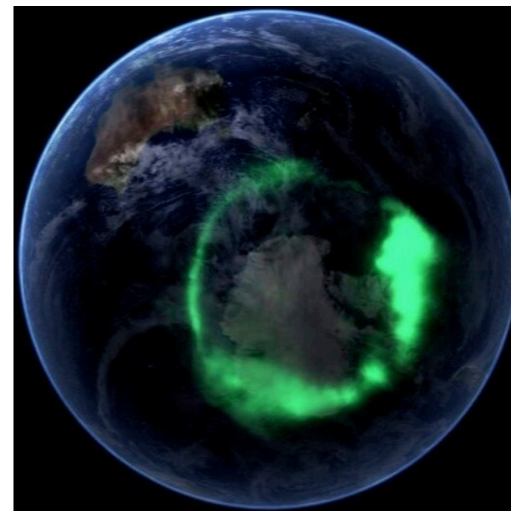
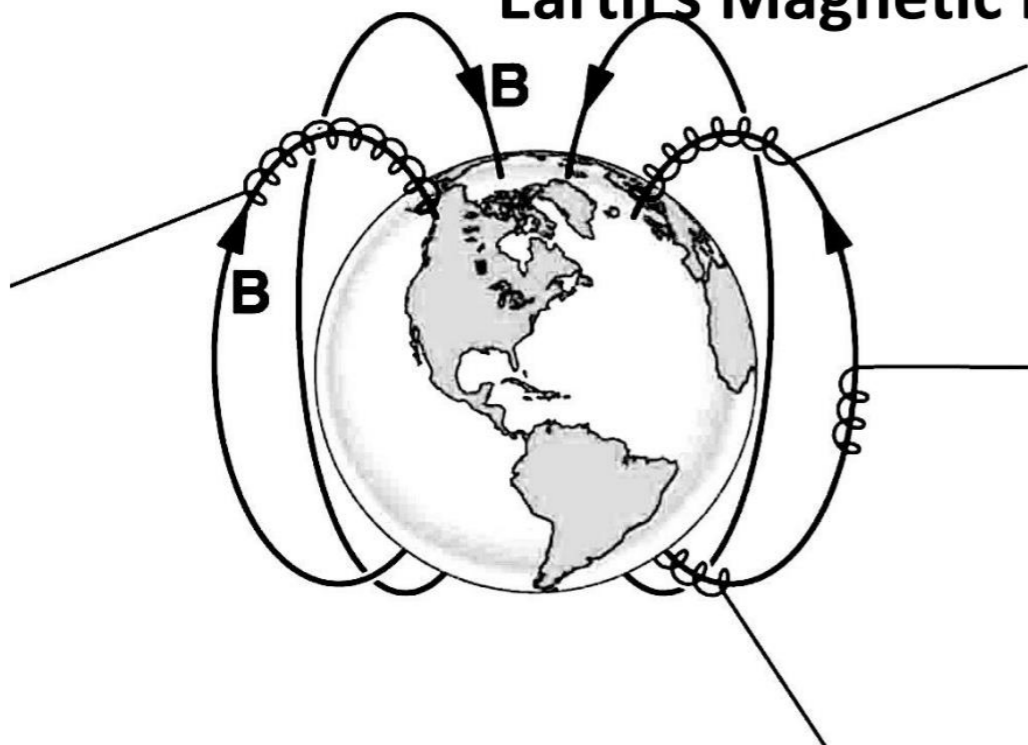
- Quando $v_{\parallel} \neq 0$ e $v_{\perp} = 0$, temos $\alpha = 0$ (Movimento Retilíneo Uniforme)



A teoria de órbitas de partículas é bem adequada para estudar a trajetória de partículas carregadas que entram na atmosfera da Terra

- Partículas carregadas que chegam à atmosfera terrestre são direcionadas para os pólos pelo campo magnético terrestre
 - A colisão dessas partículas carregadas com as moléculas do ar na atmosfera dão origem as auroras

Charged Particle Trajectories in Earth's Magnetic Field



Momento magnético associado ao movimento ciclotrônico

- O momento magnético devido à uma corrente circular (I) é normal à área A

$$|\mathbf{m}| = I A$$

- A corrente devido ao movimento ciclotrônico é

$$I = \frac{|q|}{T_c} = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi}$$

- A área definida pelo movimento ciclotrônico é

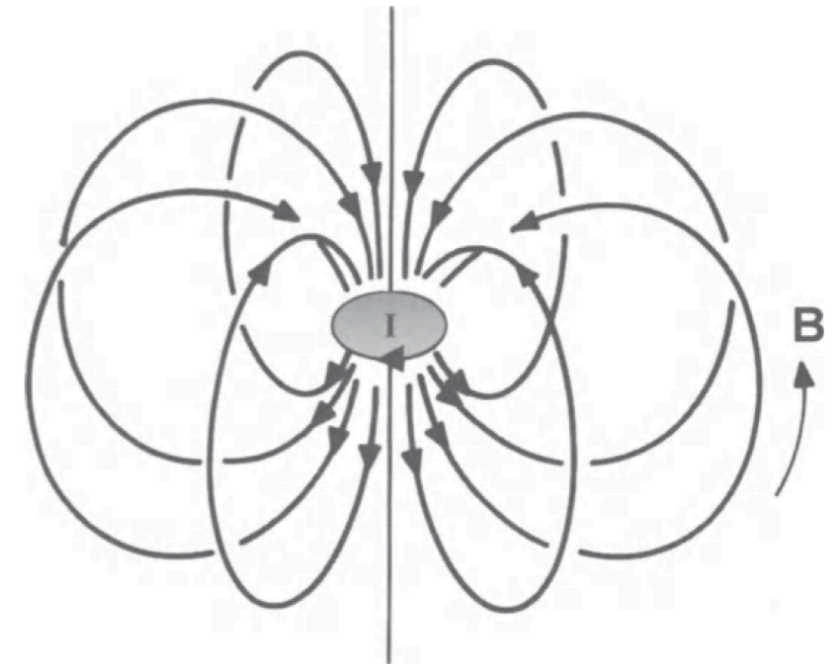
$$A = \pi r_c^2$$

- Portanto, o momento magnético é

$$|\mathbf{m}| = \frac{|q|\Omega_c}{2\pi} \pi r_c^2 = \frac{1}{2} |q| \Omega_c r_c^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B_0} = \frac{W_{\perp}}{B_0}$$

- Em notação vetorial, o momento magnético associado ao movimento ciclotrônico é

$$\mathbf{m} = -\frac{W_{\perp}}{B_0^2} \mathbf{B}_0$$



Corrente de magnetização associada ao movimento ciclotrônico

- A magnetização \mathbf{M} devido ao movimento ciclotrônico de várias partículas é

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\delta V} \sum_{j=1}^N \mathbf{m}_j = \frac{N}{\delta V} \mathbf{m} = n\mathbf{m} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M} = -\frac{nW_{\perp}}{B_0^2} \mathbf{B}_0$$

- Do eletromagnetismo clássico, a corrente de magnetização é $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$. Escrevendo $\mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_M$, onde \mathbf{J} é a corrente devido ao movimento das cargas (sem ser o movimento ciclotrônico), a equação de Ampère-Maxwell torna-se

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \text{ where } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

- Uma relação simples entre \mathbf{B} e \mathbf{H} exist quando \mathbf{M} é proporcional ao \mathbf{B} ou ao \mathbf{H}
 - Por exemplo, $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, onde χ_m é a susceptibilidade magnética do meio
- Em um plasma, no entanto, $M \propto 1/B$ (não-linear). Portanto, não é conveniente modelar o plasma como sendo um meio magnético

4300326 - Introdução à Física de Plasmas e à Fusão Nuclear

- **A teoria de órbitas de partículas: o movimento de cargas em campos EMs**
 - *Introdução*
 - *Campo elétrico estático e uniforme*
 - *Campo magnético estático e uniforme*
 - *Campos elétrico e magnético estáticos e uniformes*

A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

- No caso em que $\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_0$ são estáticos e uniformes, temos que

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$

- Decompondo \mathbf{v} e \mathbf{E}_0 em suas componentes paralela and perpendicular:

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q (\mathbf{E}_{0,\parallel} + \mathbf{E}_{0,\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0)$$

- Direção paralela

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q \mathbf{E}_{0,\parallel} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\parallel}(0) + \frac{q}{m} \mathbf{E}_{0,\parallel} t \quad \rightarrow \quad \mathbf{r}_{\parallel}(t) = \mathbf{r}_{\parallel}(0) + \mathbf{v}_{\parallel}(0)t + \frac{q}{2m} \mathbf{E}_{0,\parallel} t^2$$

- Direção perpendicular

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q (\mathbf{E}_{0,\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0)$$

A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

- Para resolver a equação perpendicular, vamos fazer: $\mathbf{v}_\perp(t) = \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$

(Troca de referencial)

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q (\mathbf{E}_{0,\perp} + \mathbf{v}_c \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \times \mathbf{B}_0)$$

- Escolhendo a velocidade (constante) $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ como

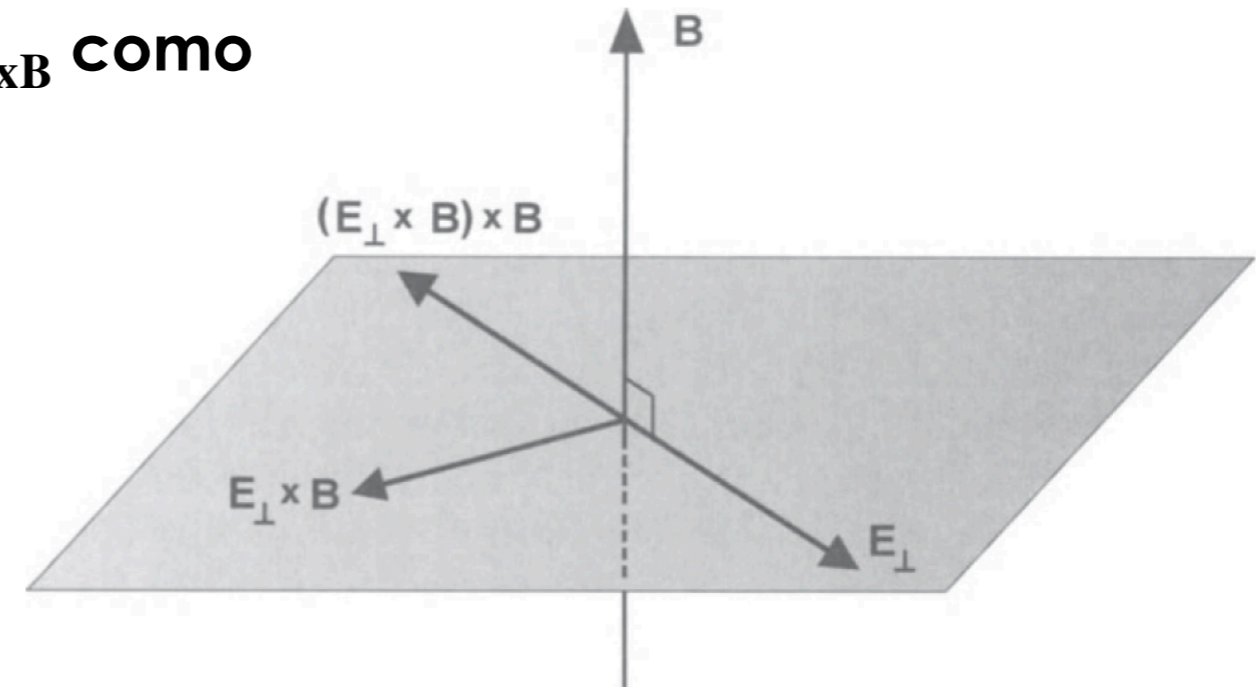
$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E}_{0,\perp} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

- A equação de movimento torna-se

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{v}_c \times \mathbf{B}_0$$

- A solução dessa equação, novamente, fornece um movimento ciclotrônico:

$$\mathbf{v}_c(t) = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}_c(t)$$



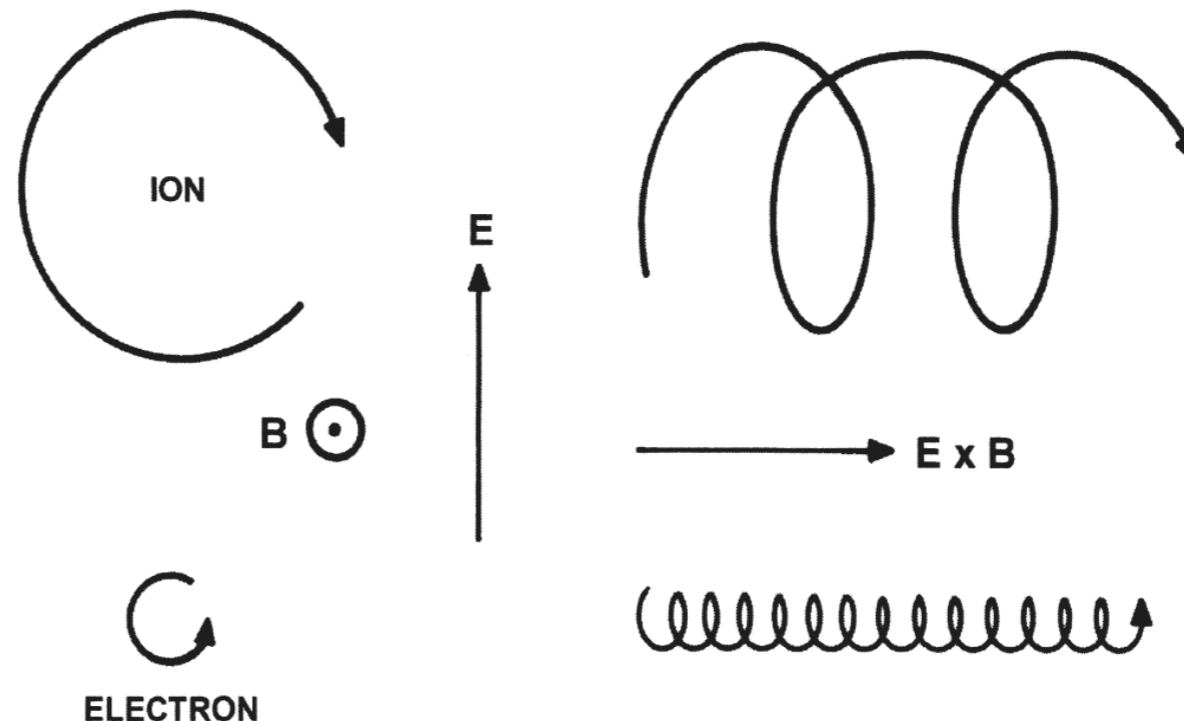
A teoria de órbitas de partículas: campos elétrico e magnético estáticos e uniformes

- Portanto, a solução desse problema é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_{\parallel}(t) + \mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{0,\parallel} + \frac{q \mathbf{E}_{0,\parallel}}{m} t + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$$

- A velocidade constante $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \mathbf{E}_{0,\perp} \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$ é chamada de deriva ExB
 - Note que $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ é independente da massa e da carga da partícula
 - Como $\mathbf{E}_{0,\parallel} \times \mathbf{B}_0 = 0$, podemos escrever $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$

$$r_c = v_{\perp} / \Omega_c = \frac{m v_{\perp}}{|q| B_0}$$



A deriva devido à uma força de origem não-eletromagnética

- No caso em que, além de campos EMs, exista uma força \mathbf{F} (de origem não-EM) atuando sobre a partícula, a equação de movimento torna-se

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{F}$$

- O efeito dessa força é análogo ao efeito de \mathbf{E}_0 , ou seja, além de $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$ teremos

$$\mathbf{v}_{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}_0}{qB_0^2}$$

- No caso de haver um campo gravitacional uniforme ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$), essa deriva será

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}} = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

- Associada à deriva gravitacional, existirá uma densidade de corrente elétrica:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{g}} = \frac{1}{\delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_j = \frac{1}{\delta V} \left(\sum_j m_j \right) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} = \rho_m \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2}$$

- Essa corrente contribui para a formação do chamado Eletrojato Equatorial

Exercícios

- O que acontece com a velocidade de deriva \mathbf{ExB} quando o campo magnético tende a zero enquanto o campo elétrico permanece finito? Qual é a validade da expressão da deriva \mathbf{ExB} ?
- Exercício do F.F. Chen:
 - 2.1, 2.2, 2.3, 2.6 e 2.7
- Exercício do Bittencourt:
 - 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4

Referências

- **F.F. Chen**
 - *Capítulo 2, seções 2.1 e 2.1*
- **Referência adicional**
 - *Bittencourt: Cap. 2*