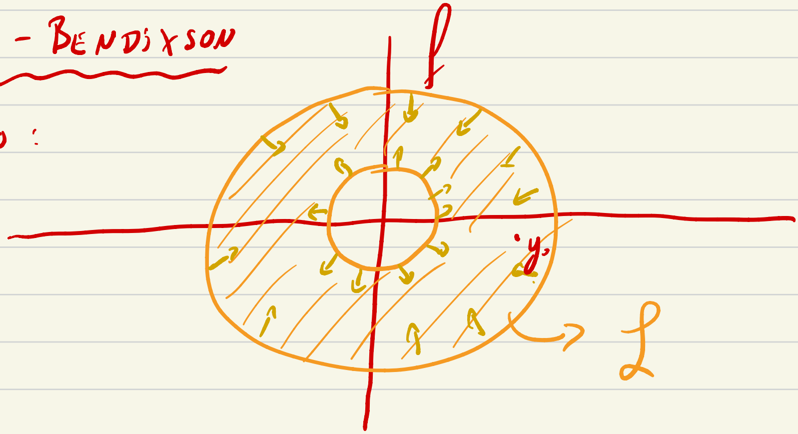
ÚLTIMA AULA.

POINCARÉ - BENDIXSON

APLICAÇÃO:



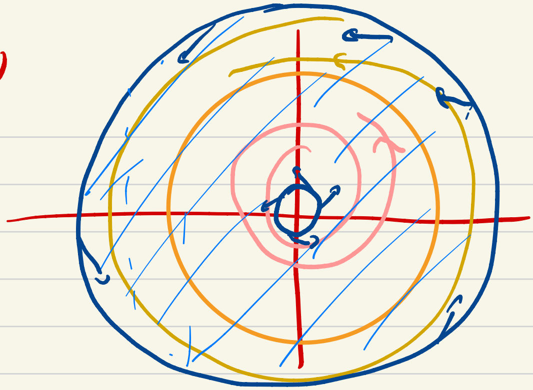

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

A PARTE LARANJA É INVARIANTE (DEPOIS QUE A SOLUÇÃO ENTRA EM $\mathcal{L}$, ELA NÃO SAI MAIS: $x \in \mathcal{L} \Rightarrow \phi_t(x) \in \mathcal{L}$)

A REGIÃO $\mathcal{L}$ É FECHADA. LOGO SE $y_0 \in \mathcal{L}$, ENTÃO $L\omega(y_0) \subset \mathcal{L}$. (P4). ALÉM DISSO, $L\omega(y_0) \neq \emptyset$.

SUPONHA QUE $\nexists$ SINGULARIDADE EM $\mathcal{L}$. LOGO, COMO $\{\phi_t(y_0), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}$, ENTÃO $\{\phi_t(y_0), t \geq 0\}$ É LIMITADO. COMO $L\omega(y_0) \subset \mathcal{L}$, ENTÃO $L\omega(y_0)$ NÃO TEM SINGULARIDADE. POR POINCARÉ - BENDIXSON, $L\omega(y_0)$ É ÓRBITA PERIÓDICA.

Ex: $\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$



NA REGIÃO AZUL, AS ÓRBITAS QUE ENTRAM, ELAS NÃO ESCAPAM.

COMO A REGIÃO AZUL NÃO TEM SINGULARIDADE, CONCLUÍMOS QUE SE $y_0 \in$ REGIÃO AZUL, $L_\omega(y_0)$ É ÓRBITA PERIÓDICA

NESTE CASO, $L_\omega(y_0) = \partial B(0,1)$

# Teorema de Picard-Lindelöf.

Seja $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Se $f \in C^1$, $\exists\, y : ]-a,a[ \to \mathbb{R}^n$ solução única do problema.

**Ingrediente:** Teo. de Ponto fixo de Banach.

**Definição:** Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado.

i) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$ t.q. se $n, m \geq N$, então $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. $\left( \lim_{N\to\infty} \left( \sup_{n,m \geq N} \|x_n - x_m\| \right) = 0 \right)$

ii) Dizemos que $E$ é completo se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento de $E$. $\left( (x_n) \text{ Cauchy} \Rightarrow \exists\, x \in E \text{ t.q. } x = \lim_{n\to\infty} x_n \right)$.

iii) Um subconjunto $F \subset E$ é fechado se toda sequência $(x_n)$ contida em $F$ que converge, temos $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$.

**Lema:** Se $F \subset E$ é fechado e $E$ é completo, então dada uma sequência $(x_n) \subset F$ de Cauchy, então $(x_n)$ converge em $F$.

**Demo:** $(x_n)$ de Cauchy $\Rightarrow \exists\, x \in E$ t.q. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (pois $E$ é completo)

$\Rightarrow x \in F$ (pois $F$ é fechado) $\blacksquare$

TEOREMA PONTO FIXO DE BANACH: SEJA $(E, \|\cdot\|)$ UM ESPAÇO NORMADO COMPLETO. SEJA $F \subset E$ FECHADO E $T: F \to F$ UMA FUNÇÃO T.Q.

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \forall x, y \in F,$$

EM QUE $0 \leq \alpha < 1$ É UMA CONSTANTE. LOGO $\exists$ UM ÚNICO PONTO $x_0 \in F$ T.Q. $T(x_0) = x_0$ ($x_0$ PONTO FIXO)

DEMO: UNICIDADE

SE $\boxed{T(x_0) = x_0 \quad E \quad T(y_0) = y_0}$, ENTÃO

$0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \|T(x_0) - T(y_0)\| \leq \alpha \|x_0 - y_0\| \\ \quad \| \\ \|x_0 - y_0\| \end{array}\right\} \underbrace{(1-\alpha)}\|x_0 - y_0\| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\|x_0 - y_0\| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_0 = y_0}$$

EXISTÊNCIA SEJA $y_0 \in F$. VAMOS DEFINIR $y_1 = Ty_0$, $y_2 = Ty_1$, $y_3 = Ty_2$, ..., $y_{n+1} = Ty_n$. LOGO $y_n = T^n(y_0)$.

A SEQUENCIA $y_n$ É DE CAUCHY. SEJA $N \in \mathbb{N}_0$ E $m, n \geq N$. ($m \geq n$ SEM PERDA DE GENERALIDADE).

LOGO

$$\|y_m - y_n\| = \|(y_m - y_{m-1}) + (y_{m-1} - y_{m-2}) + \cdots + (y_{n+1} - y_n)\|$$
$$\leq \|y_m - y_{m-1}\| + \|y_{m-1} - y_{m-2}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\|.$$

NOTE QUE $\|y_j - y_{j-1}\| = \|T(y_{j-1}) - T(y_{j-2})\| \leq \alpha \|y_{j-1} - y_{j-2}\|$

$y_j = T(y_{j-1})$ $\qquad$ $\|Tx - Ty\| \leq \alpha \|x - y\|,\ \forall x, y \in F.$

$$= \alpha \|T(y_{j-2}) - T(y_{j-3})\| \leq \alpha^2 \|y_{j-2} - y_{j-3}\|$$
$$\leq \ldots \leq \alpha^{j-1} \|y_1 - y_0\|.$$

LOGO $\|y_m - y_n\| \leq \alpha^{m-1}\|y_1 - y_0\| + \alpha^{m-2}\|y_1 - y_0\| + \cdots + \alpha^n \|y_1 - y_0\|$

$$= \sum_{j=n}^{m-1} \alpha^j \|y_1 - y_0\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_1 - y_0\| \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha}\|y_1 - y_0\|$$

$\alpha < 1$, $n \geq N$

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1} = \alpha^n (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1})$$
$$\leq \alpha^n (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots) = \alpha^n \frac{1}{1-\alpha}$$

CONCLUSÃO: DADO $\varepsilon > 0$, PODEMOS ESCOLHER $N$ T.Q. $\frac{\alpha^N}{1-\alpha}\|y_1 - y_0\| < \varepsilon$ (POIS $\lim_{N \to \infty} \frac{\alpha^N}{1-\alpha} = 0$, $\alpha < 1$). LOGO SE $n, m \geq N$, ENTÃO

$$\|y_m - y_n\| \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha}\|y_1 - y_0\| < \varepsilon.$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então $\exists\, p \in F$ t.q.

$\lim_{n\to\infty} y_n = p$.

p é ponto fixo

Basta observar que $T(\lim_{n\to\infty} y_n) = T(p)$

$\| \rightarrow$ T é contínua (é uniformemente contínuo)

$\lim_{n\to\infty} T(y_n)$

$\| \rightarrow y_{n+1} = T(y_n)$ por definição

$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = p$

$\Rightarrow T(p) = p$. Logo $\exists$ ponto fixo $\boxed{}$

# VOLTANDO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

VAMOS ESCOLHER $E = C([-\alpha,\alpha];\mathbb{R}^n)$
$= \{y : [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}^n;\ y \text{ é contínua}\}.$

$$\|y\| := \max_{t\in[-\alpha,\alpha]} \|y(t)\|.$$

$\hookrightarrow \sqrt{y_1^2(t) + \dots + y_n^2(t)}$

$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)).$

**FATO 1:** O ESPAÇO $(E, \|\cdot\|)$ É UM $\underbrace{\text{ESPAÇO NORMADO COMPLETO}}$

CURIOSIDADE: ESPAÇO DE BANACH.

**FATO 2:** O CONJUNTO $F := \{y \in E;\ \mathrm{Im}(y) \subset \overline{B(y_0, M)}\}$

$= \{y : [-\alpha,\alpha] \to \overline{B(y_0,M)};\ y \text{ contínua}\}$

É FECHADO EM $E$.

NÃO VAMOS PROVAR FATO 1 E 2. (VER DOERING/LOPES).

COM ESTES FATOS PODEMOS PROVAR

**TEOREMA (PICARD-LINDELÖF):** SEJA $f : [-b,b] \times \overline{B(y_0,r)} \to \mathbb{R}^n$

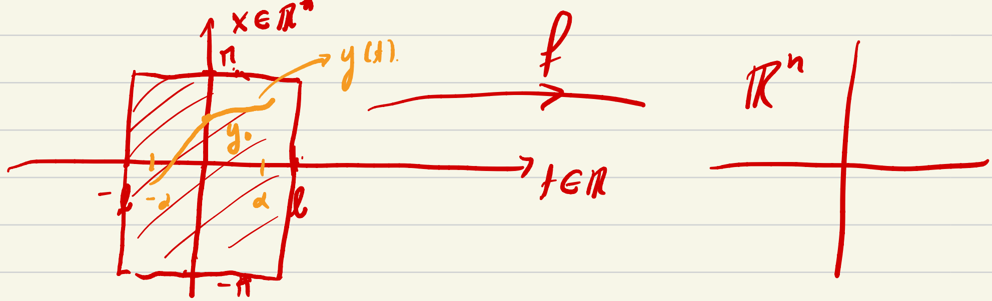
UMA FUNÇÃO CONTÍNUA, $b>0$, $r>0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. SUPONHA QUE

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \quad \forall\ (t,x),(t,y) \in [-b,b] \times \overline{B(y_0,r)}.$$

$(*)$

LOGO $\exists\, 0<\alpha<b$ T.Q. O PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ TEM ÚNICA SOLUÇÃO $y: [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}^n$.




**OBS:** $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ DE CLASSE $C^1$, ENTÃO DADO $y_0 \in E$ PODEMOS ACHAR $r > 0$ T.Q. $\overline{B(y_0, r)} \subset E$. LOGO

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_0^1 \underbrace{Df(x+\theta(y-x)).(y-x)}_{\frac{d}{d\theta}\left(f(x+\theta(y-x))\right)} d\theta \right\|$$

$$\leq \left( \max_{z \in \overline{B(y_0,r)}} \|Df(z)\| \right) \|y - x\|, \ \forall x, y \in \overline{B(y_0, r)}.$$

LOGO SE $f \in C^1$, A CONDIÇÃO (*) É VÁLIDA.

$$\overline{B(y_0, r)} := \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \|x - y_0\| \leq r \}.$$

DEMO: $\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}} \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)\,ds$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds}$$

BASTA ACHAR SOLUÇÃO CONTÍNUA DA EQUAÇÃO. NOTE QUE SE $y$ É CONTÍNUA E $y(t) = y_0 + \underbrace{\int_0^t \underbrace{f(s, y(s))}_{\text{CONTÍNUO}}\,ds}_{\text{É } C^1} \Rightarrow y$ É DE CLASSE $C^1$.

PARA ISTO DEFINIMOS $T: F \to F$, $F := \{y : [-\alpha, \alpha] \to \overline{B(y_0, r)} ; y \text{ contínua}\}$

$T(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$. LOGO $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$

$\Updownarrow$

$y$ É PONTO FIXO DE $T$ $(Ty = y)$.

BASTA AGORA MOSTRAR QUE AS CONDIÇÕES DO TEO. PONTO FIXO VALEM. PARA ISTO, ESCOLHEMOS $0 < \alpha < \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{L}, b\right)$

$$M := \max_{(t,x) \in [-b, b] \times \overline{B(y_0, r)}} \|f(t, x)\|$$

1) T LEVA F EM F.

DEMO: $\|T(y) - y_0\| = \left\| y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds - y_0 \right\|$

$$\leq \int_0^t \|f(s,y(s))\|\,ds \leq \alpha M < r, \text{ pois } \alpha < \frac{r}{M},$$

$\Rightarrow T(y)(t) \in \overline{B(y_0, r)} \Rightarrow T(y) \in F.$ $\square$

2) T É T.Q. $\|T(y) - T(z)\| \leq C\|y - z\|, \ \forall y, z \in F$, PARA $C<1$.

DEMO:

$$\|T(y) - T(z)\| = \left\| y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds - y_0 - \int_0^t f(s,z(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\|\,ds \leq \int_0^t L\|y(s) - z(s)\|\,ds$$

$$\leq \alpha L \|y - z\|. \qquad \alpha < \frac{1}{L} \Rightarrow \alpha L < 1.$$ $\square$

ESTAMOS NAS CONDIÇÕES DO PONTO FIXO.

$$\Longrightarrow \exists!\, y \in F \text{ T.Q. } T(y) = y.$$

$$\Longleftrightarrow y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$\square$