Aula Passada:

· Linear $y'(t) = Ay(t)$ 0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável

$$\Updownarrow$$

todos os $\underbrace{\text{autovalores de } A}_{\text{raízes do polinômio característico } p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)}$ têm parte real negativa. (<0)

· Não Linear $y'(t) = f(y(t))$ y_0 é singularidade de f $(f(y_0) = 0)$

$$Df(y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_0) \end{pmatrix}$$

(*) Se os autovalores de $Df(y_0)$ têm parte real negativa (<0)

$$\Downarrow$$

y_0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

OBS: A volta não vale.

<u>Exemplo:</u> $y'(t) = -y(t)^3$ $f(y) = -y^3$.

A única singularidade é 0 $(f(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0)$

$Df(0) = f'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0$ autovalor de $Df(0)$ é 0.

Não satisfaz o critério acima (*)

Mas 0 é assintoticamente estável.

$$y'(t) = -y(t)^3$$

$$-\int_0^t \frac{y'(t)}{y(t)^3}\,dt = t \iff -\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dw}{w^3} = t \iff \frac{1}{2}\frac{1}{w^2}\Big|_{y_0}^{y(t)} = t$$

$$\iff \frac{1}{y(t)^2} - \frac{1}{y_0^2} = 2t \iff \frac{1}{y(t)^2} = 2t + \frac{1}{y_0^2}$$

$$\iff y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2t+\frac{1}{y_0^2}}} = \frac{y_0}{\sqrt{2ty_0^2+1}} \quad (+ \text{ pois } y(0) = y_0)$$

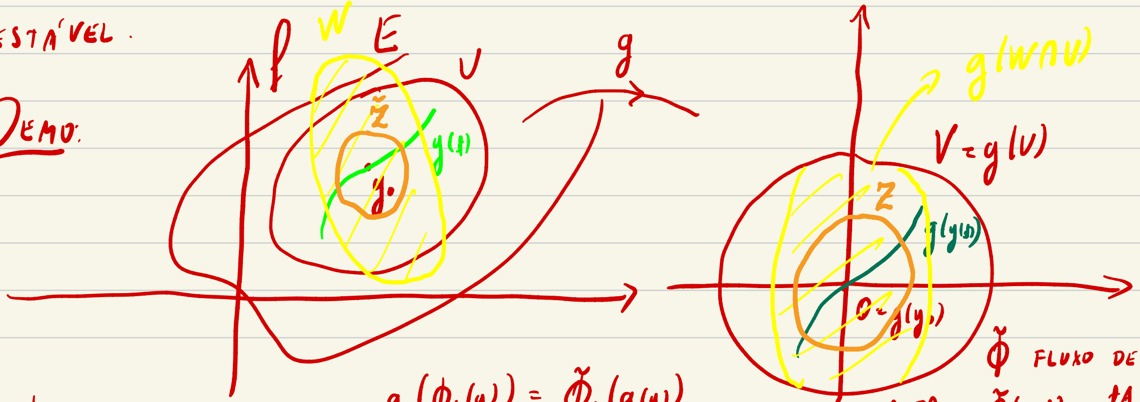
$\boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \forall\, y_0}$

Além disso, se $|y_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |y(t)| < \varepsilon$. (Estável)

} Assintoticamente estável.

Teorema (Lyapunov-Perron) Seja $y'(t) = f(y(t))$, $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e y_0 uma singularidade de f. Se os autovalores de $Df(y_0)$ só tiverem parte real negativa (<0), então y_0 é ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Demo:



$$g(\phi_t(y)) = \tilde{\phi}_t(g(y))$$

ϕ fluxo de f

$\tilde{\phi}$ fluxo de $A := Df(y_0)$, $\tilde{\phi}(x,t) = e^{tA}x$.

SABEMOS QUE $\exists\, y_0 \in U \overset{ab}{\subset} E$ E UMA CONJUGAÇÃO TOPOLÓGICA

$g: U \to V$ T.Q. $g(y_0) = 0$ E $g(\phi_t(y)) = \tilde{\phi}_t(g(y))$ (GROBMAN-HARTMAN)

SABEMOS QUE $A := Df(y_0)$ TEM AUTOVALORES COM PARTE REAL < 0,

LOGO 0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL DE A

(CRITÉRIO PARA SISTEMAS LINEARES). ASSIM

1) y_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL.

DADO W UM ABERTO DE y_0 $\Rightarrow$ $g(U \cap W)$ É ABERTO DE 0.

COMO 0 É EQUILÍBRIO ESTÁVEL, ENTÃO $\exists\, Z \overset{ab}{\subset} g(U \cap W)$, $0 \in Z$ E

SE $y \in Z$, ENTÃO $\tilde{\phi}_t(z) \in g(U \cap W)$.

SEJA $\tilde{Z} = g^{-1}(Z)$. LOGO $y_0 \in \tilde{Z} \overset{ab}{\subset} g^{-1}(g(U \cap W)) = U \cap W$.

SE $y \in \tilde{Z}$, ENTÃO $\phi_t(y) = g^{-1} \circ g \circ \phi_t(y) = g^{-1}\underbrace{\boxed{\tilde{\phi}_t(\underbrace{g(y)}_{\in Z})}}_{g(U \cap W)} \in U \cap W \subset W$.

2) y_0 É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL

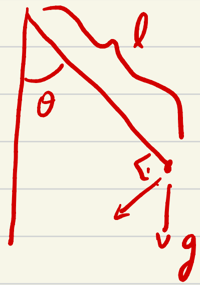
COMO 0 É ASS. ESTÁVEL PARA $Df(y_0)$, PODEMOS ESCOLHER Z (O MESMO DA PARTE 1)

DE TAL FORMA QUE SE $y \in Z$, ENTÃO $\lim_{t \to \infty} \tilde{\phi}_t(y) = 0$.

Assim, se $y \in \tilde{Z} = g^{-1}(Z)$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(y) = \lim_{t\to\infty} g^{-1} g(\phi_t(y)) = \lim_{t\to\infty} g^{-1}(\underbrace{\tilde{\phi}_t(g(y))}_{\to 0}) = g^{-1}(0) = y_0 \quad \boxed{\text{R}}$$

EX: PÊNDULO COM ATRITO



$$\boxed{m l \theta'' = \underbrace{-mg \sin\theta}_{\text{GRAVIDADE}} \underbrace{- k l \theta'}_{\text{ATRITO.}}}$$

$, k, l, m, g > 0.$

θ, $\theta' = w$

$$\theta' = w \qquad (\theta, w)' = f(\theta, w)$$
$$w' = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m} w$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é $f(\theta, w) = (\underbrace{w}_{f_1}, \underbrace{-\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m} w}_{f_2})$

SINGULARIDADES?

$$f(\theta, w) = (0,0) \iff \begin{cases} w = 0 \\ -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m} w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} w = 0 \\ \sin\theta = 0 \\ \theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

$\{(n\pi, 0),\ n \in \mathbb{Z}\}$

Como são as singularidades?

$$Df(\theta, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES? $\det(\lambda I - Df) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l}\cos\theta & \lambda + \frac{k}{m} \end{pmatrix}$

$$\lambda\left(\lambda+\frac{h}{m}\right)+\frac{g}{l}\cos\theta$$

$$\lambda^2+\frac{h}{m}\lambda+\frac{g}{l}\cos\theta=0$$

$$\lambda_{\pm}=\frac{-\frac{h}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}\cos\theta}}{2}$$

NAS SINGULARIDADES $(n\pi, 0)$

n É PAR $\cos(n\pi)=1$ $\quad \lambda_{\pm}=-\frac{h}{2m}\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2-4\frac{g}{l}}}{2}$ $\quad < -\frac{h}{2m}$

$\operatorname{Re}\lambda_{\pm}<0.$

$\Rightarrow$ $(n\pi, 0)$, n PAR É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

n ÍMPAR $\cos(n\pi)=-1$ $\quad \lambda_{\pm}=-\frac{h}{2m}\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2+4\frac{g}{l}}}{2}$ $\quad > \frac{h}{2m}$

LOGO $\exists$ UM AUTOVALOR >0
UM AUTOVALOR <0.

NÃO É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

OBS: TODA VEZ QUE $\exists$ AUTOVALOR COM PARTE REAL >0, O PONTO É INSTÁVEL (NÃO VAMOS PROVAR)

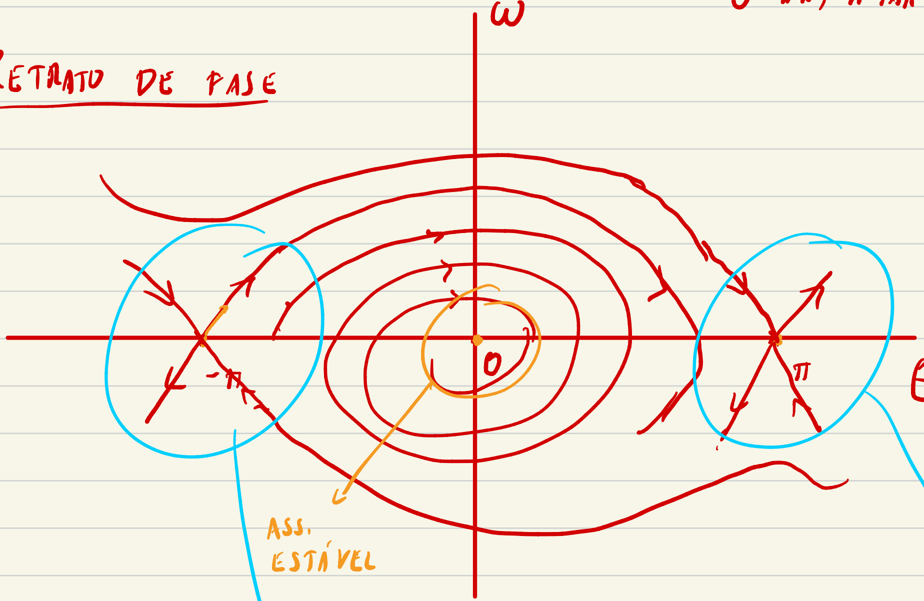
LOGO $(n\pi, 0)$, n ÍMPAR, SÃO INSTÁVEIS.

$\theta = n\pi$, n ímpar   instável.

Interpretação física

$\theta = n\pi$, n par   ass. estável

Retrato de fase



Grobman-Hartman

Em $-\pi$ e π $Df(\pm\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$ Autovalores >0, <0

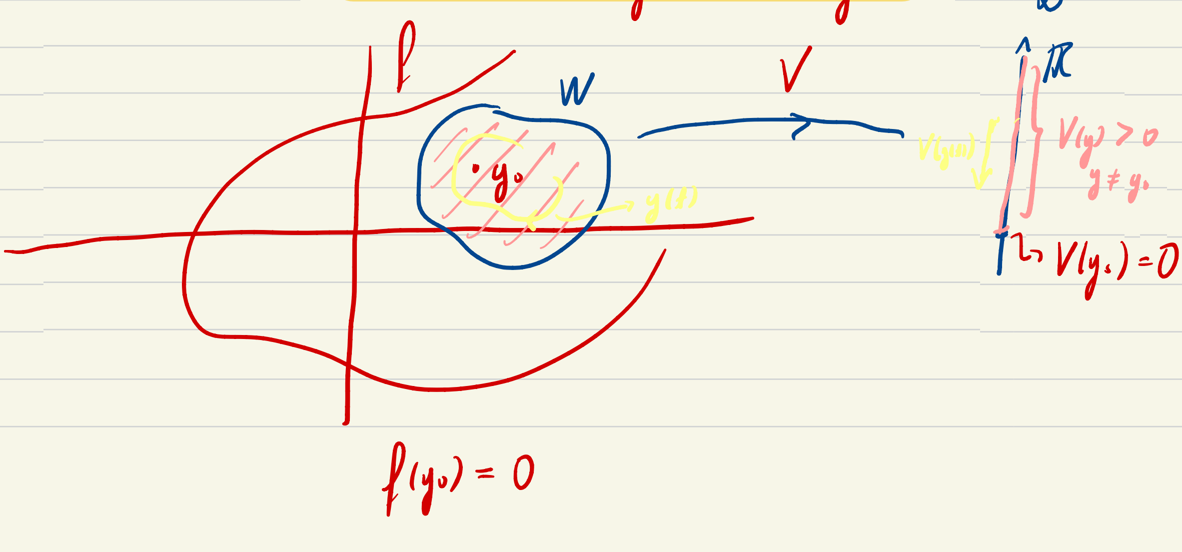
Estabilidade segundo Lyapunov

Objetivo: Dar condições suficientes para saber se um ponto de equilíbrio é estável/ass. estável sem saber autovalores de $Df(y_0)$.

Definição: Seja $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e y_0 uma singularidade de f, $f(y_0) = 0$. Uma função de Lyapunov para f em y_0 é uma função $V: W \overset{ab}{\subset} E \to \mathbb{R}$, $y_0 \in W$, <u>contínua</u> t.q.

1) $V(y_0) = 0$ e $V(y) > 0$, se $y \in W \setminus \{y_0\}$

2) Se $y: I \to W$ é solução de $y'(t) = f(y(t))$, então $t \mapsto V(y(t))$ é não crescente: se $t_2 > t_1 \Rightarrow V(y(t_2)) \leq V(y(t_1))$



Proposição: Suponha que $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, y_0 é uma singularidade de f e $V: W \to \mathbb{R}$, $y_0 \in W \overset{ab}{\subset} E$, tal que V é diferenciável, $V(y_0) = 0$ e $V(y) > 0$, $y \in W \setminus \{y_0\}$. Logo

$t \mapsto V(y(t))$ é não crescente, $\forall\, y: I \to W$, $y' = f(y(t)) \iff \langle \nabla V(y), f(y) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in W$.

__Demo__: $t \mapsto V(y(t))$ é não crescente

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) \leq 0 \iff \langle \nabla V(y(t)), \boxed{y'(t)} \rangle \leq 0$$

$$= f(y(t))$$

$$\iff \langle \nabla V(y(t)), f(y(t)) \rangle \leq 0, \ \forall t \in I.$$

Tomando $\bar{y} \in W$ e $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = \bar{y}$, concluímos que

equivalentes.

$$\langle \nabla V(\bar{y}), f(\bar{y}) \rangle = \langle \nabla V(y(0)), f(y(0)) \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{y} \in W \qquad \blacksquare$$

__Exemplo 1)__ Seja $y'(t) = f(y(t))$, $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Seja y_0 uma singularidade de f e $V: W \to \mathbb{R}$ seja uma integral primeira de f em W. (Aqui $y_0 \in W \overset{ab}{\subset} E$). Se y_0 é o único ponto de mínimo global de V, então $\tilde{V}: W \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{V}(y) = V(y) - V(y_0)$ é uma função de Lyapunov.

Demo: $\tilde{V}(y_0) = V(y_0) - V(y_0) = 0$.

Se $y \neq y_0 \Rightarrow \tilde{V}(y) = V(y) - V(y_0) > 0$, pois y_0 é único ponto de mínimo local.

Além disso, $t \mapsto \tilde{V}(y(t)) = V(y(t)) - V(y_0)$ é constante (V é int. primeira)

Logo é não-crescente. $\blacksquare$

Exemplo 2 (Sistema mecânico conservativo).

Neste caso, $m x''(t) = F(x(t))$, $F(x(t)) = -\nabla U(x(t))$

x, $y = x'$

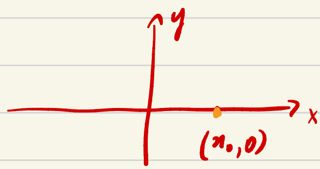
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{F}{m} = -\frac{1}{m} \nabla U(x). \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \left(y, -\frac{1}{m} \nabla U(x)\right)$$

Se x_0 é mínimo local estrito de U ($\exists\, x_0 \in W \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$ t.q. $U(x_0) < U(x)$, $\forall x \in W \setminus \{x_0\}$)

Logo $V : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x,y) = \frac{m}{2}|y|^2 + U(x) - U(x_0)$$



é função de Lyapunov de f em $(x_0, 0)$.

(Note que $f(x_0, 0) = (0, -\frac{1}{m}\nabla U(x_0)) = (0,0)$, pois $\nabla U(x_0) = 0$, já que x_0 é mínimo local).

$\Rightarrow (x_0, 0)$ é singularidade.

DEMO: $V(x_0, 0) = \frac{m}{2}|0|^2 + U(x_0) - U(x_0) = 0.$

$$V(x,y) = \underbrace{\frac{m}{2}|y|^2}_{\geq 0} + \underbrace{U(x)}_{\substack{> U(x_0) \\ x \in W \setminus \{x_0\}}} - U(x_0) > V(x_0, 0) \text{ SE } (x,y) \neq (x_0, 0).$$

POR FIM $t \mapsto V(x(t), y(t)) = \underbrace{\frac{m}{2}|y(t)|^2 + U(x(t))}_{= \text{CONSTANTE POR CONSERVAÇÃO DE ENERGIA}} - U(x_0) = \text{CONSTANTE}.$

$\Rightarrow t \mapsto V(x(t), y(t))$ É NÃO CRESCENTE.

AULA QUE VEM.

TEO: SE $\exists$ FUNÇÃO DE LYAPUNOV EM y_0

$\Longrightarrow$ y_0 É ESTÁVEL