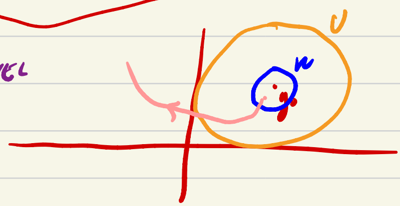
Recordação: Aula Passada

SINGULARIDADE

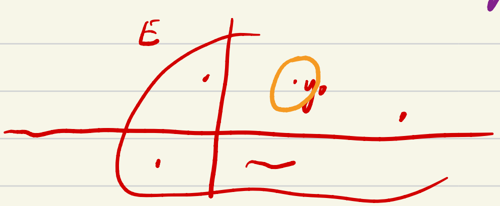
$y'(t) = f(y(t))$, $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, e $y_0 \in E$ t.q. $\widetilde{f(y_0) = 0}$.

1) y_0 é equilíbrio estável se dado $y_0 \in U \subset E$, $\exists$ $y_0 \in W \subset U$ t.q. $\phi_t(x) \in U$, $\forall x \in W$, $\forall t \geq 0$

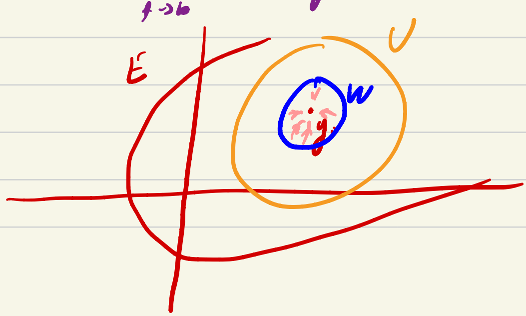
2) y_0 é equilíbrio instável se não for estável



3) y_0 é equilíbrio (singularidade) isolado se $\exists$ $U \subset E$ t.q. y_0 é a única singularidade em U



4) y_0 é equilíbrio assintoticamente estável se y_0 for equilíbrio estável e se existir $W \overset{ab}{\subset} E$ t.q. $\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = y_0$, $\forall x \in W$



EXEMPLO 1: $\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) & * \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) & ** \end{cases}$

SINGULARIDADES $(0,0)$. É ISOLADO ✓

$(0,0)$ É ESTÁVEL? INSTÁVEL? É ASSINT. ESTÁVEL?

FAREMOS UMA MUDANÇA DE COORDENADAS: $\begin{matrix} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{matrix}$

$$* \quad r'(t)\cos\theta - r(t)\sin\theta\,\theta'(t) = -r\sin\theta + r\cos\theta(1 - r^2)$$
$$** \quad r'(t)\sin\theta + r(t)\cos\theta\,\theta'(t) = r\cos\theta + r\sin\theta(1 - r^2)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2) \\ r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r\sin\theta + r\cos\theta(1-r^2) \\ r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -r^2\cancel{\sin\theta\cos\theta} + r^2\cos^2\theta(1-r^2) + r^2\cancel{\sin\theta\cos\theta} + r\sin^2\theta(1-r^2) \\ r\sin^2\theta - r\cancel{\sin\theta\cos\theta}(1-r^2) + r\cos^2\theta + r\cancel{\sin\theta\cos\theta}(1-r^2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r^2(1-r^2) \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1-r^2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} r = 1 & r' = 0 & r(t) = ct \\ r > 1 & r' = r(1-r^2) < 0 & \Rightarrow r(t) \text{ DECRESCE} \\ 0 < r < 1 & r' = r(1-r^2) > 0 & \Rightarrow r(t) \text{ CRESCE.} \\ \theta' = 1 \Rightarrow \theta(t) = c + t & & \end{array}}$$

RETRATO DE FASE

CONCLUSÃO: $(0,0)$ É INSTÁVEL

CURIOSIDADE: $(x_1(t), x_2(t)) = \left(\dfrac{\cos(\theta_0+t)}{\sqrt{1+k e^{-2t}}} , \dfrac{\operatorname{sen}(\theta_0+t)}{\sqrt{1+k e^{-2t}}} \right)$

EXEMPLO 2: $\begin{cases} r' = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ \theta' = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + t.$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{r} = n\pi \Leftrightarrow r = \frac{1}{n}$

SE $r = \frac{1}{n} \Rightarrow r' = 0 \Rightarrow r$ É CONSTANTE

$r > 1 \quad r' = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) > 0 \quad r$ CRESCE

$1 > r > \frac{1}{2} \quad r' = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) < 0 \quad r$ DECRESCE

$\frac{1}{2} > r > \frac{1}{3} \quad r' = r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right) > 0 \quad r$ CRESCE

$\vdots$

$\frac{\pi}{r} < \pi$

$r < 1 \Rightarrow \frac{1}{r} > 1$

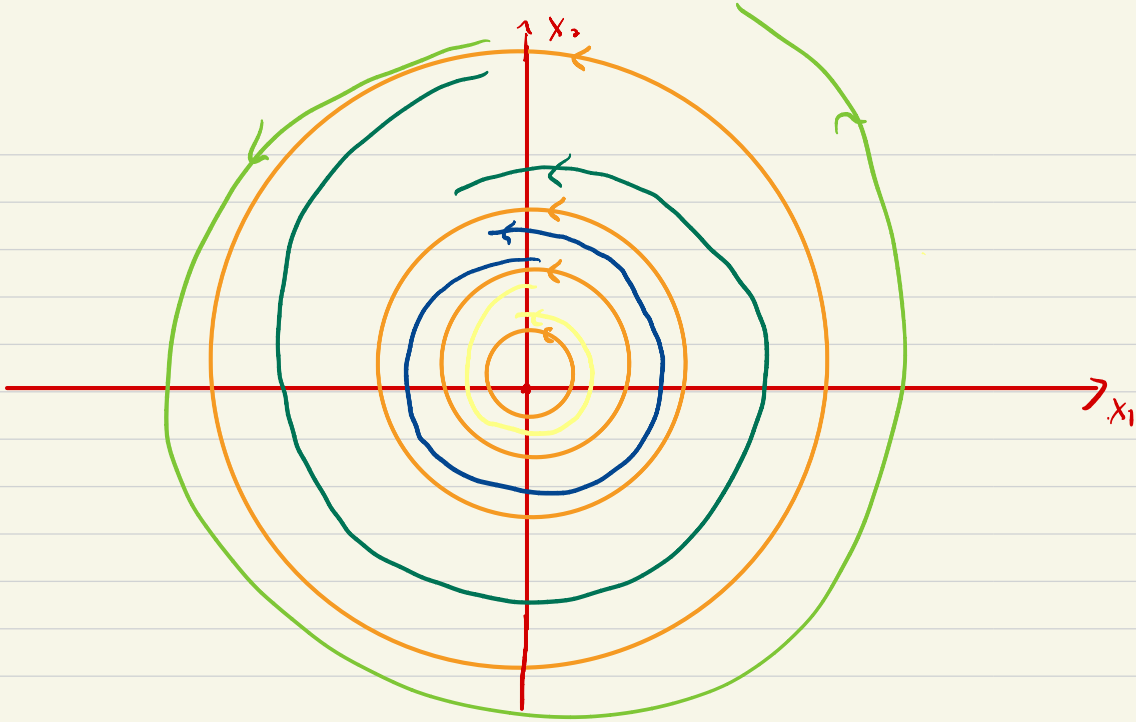
$1 < \frac{1}{r} < 2$

$\pi < \frac{\pi}{r} < 2\pi$

$\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}$

$2 < \frac{1}{r} < 3$

$2\pi < \frac{\pi}{r} < 3\pi$



(0,0) É PONTO DE <u>EQUILÍBRIO ISOLADO</u>.

DADO $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \frac{1}{n} < \varepsilon$ T.Q. SE $\|x\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x)\| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ É PONTO DE <u>EQUILÍBRIO ESTÁVEL</u>

MAS <u>NÃO É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL</u>, POIS OS PONTOS

TAIS QUE $\|x\| = \frac{1}{n}$ CONTINUAM COMO $\|\phi_t(x)\| = \frac{1}{n}$

ALGUMAS PROPRIEDADES DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

PROPOSIÇÃO: SE y_0 É PONTO DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL, ENTÃO y_0 É UMA SINGULARIDADE ISOLADA.

DEMO: SEJA $W \overset{ab}{\subset} E$ T.Q. SE $x \in W$, ENTÃO $\lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = y_0$.

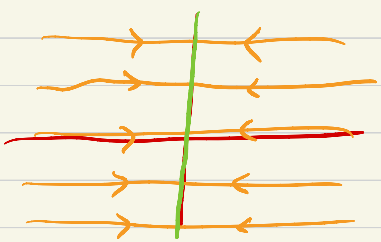
ESTE CONJUNTO W EXISTE, POIS y_0 É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

SEJA $z_0 \in W$ UM PONTO DE EQUILÍBRIO (SINGULARIDADE)

$$\left.\begin{aligned} &\text{LOGO COMO } z_0 \in W \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \phi_t(z_0) = y_0 \\ &\text{COMO } z_0 \text{ É SINGULARIDADE} \Rightarrow \phi_t(z_0) = z_0 \end{aligned}\right\} y_0 = z_0$$

ASSIM A ÚNICA SINGULARIDADE EM W É O $y_0 \Rightarrow y_0$ É ISOLADO $\boxtimes$

EX: $y'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t)$ SINGULARIDADES NÃO ISOLADAS ESTÁVEIS, MAS NÃO ASS. ESTÁVEIS



PROPOSIÇÃO 2 (EXERCÍCIO). PONTOS DE EQUILÍBRIO ESTÁVEIS, ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS, INSTÁVEIS E ISOLADOS SÃO INVARIANTES POR CONJUGAÇÃO.

Proposição: Seja $y'(t) = f(y(t))$, $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1. Se existe um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então $\nexists$ $V: E \to \mathbb{R}$ integral primeira.

Demo: Seja $V: E \to \mathbb{R}$ uma função contínua t.q. $t \mapsto V(y(t))$ é constante para toda solução de $y' = f(y)$.

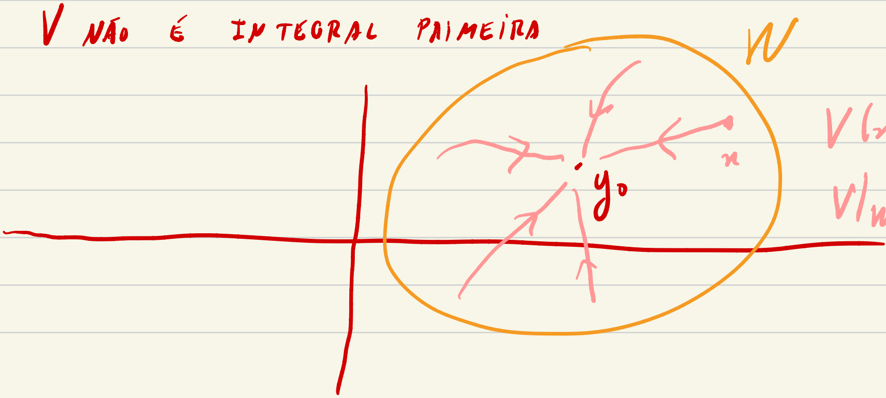
Seja y_0 um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Logo $\exists\, W \overset{ab}{\subset} E$ t.q. $y_0 \in W$ e $\lim\limits_{t \to \infty} \phi_t(x) = y_0$, $\forall x \in W$.

Assim $\lim\limits_{t \to \infty} V(\phi_t(x)) = \underset{\forall x \in W}{V(y_0)}$. Mas $V(\phi_t(x))$ é constante.

Logo $V(\phi_t(x)) = V(y_0)$, $\forall x \in W$ e $t \geq 0$.

Em particular, para $t = 0 \Rightarrow V(x) = V(y_0) \Rightarrow V|_W$ é constante, ou seja V não é integral primeira $\boxed{\text{Q}}$



$V(x) = V(y_0)$

$V|_W = V(y_0)$.

COROLÁRIO: SISTEMAS MECÂNICOS CONSERVATIVOS $(F=-\nabla V)$ NÃO TÊM PONTOS DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS.

DEMO: $E(x,y)=\frac{m}{2}|y|^2+V(x)$ É UMA INTEGRAL PRIMEIRA DE

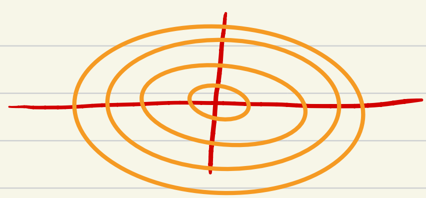
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m}F = -\frac{1}{m}\nabla V \end{cases}$$

EXEMPLO 1 MOLA SEM ATRITO (CONSERVATIVO)

$F(x)=-kx \qquad mx''=-kx \qquad E_T(x,y)=\frac{m}{2}y^2+\frac{k}{2}x^2.$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -kx \end{cases}$$

NÃO HÁ EQUILÍBRIOS ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS.

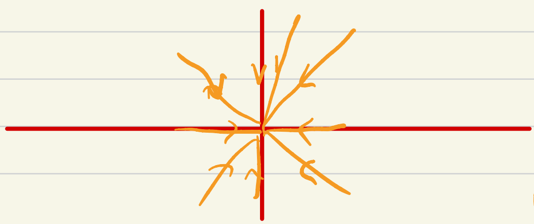


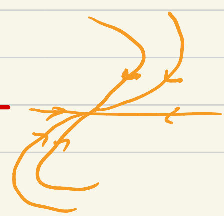
EXEMPLO 2 MOLA COM ATRITO (NÃO CONSERVATIVO)

$F(x,x')=-kx-cx' \qquad mx''=-kx-cx' \quad , \; c\neq 0 \qquad$ NESTE CASO $F\neq -\frac{d}{dx}V(x)$.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -kx-cy \end{cases}$$

0 É EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL





EXEMPLO 3 $y' = Ay$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

VIMOS QUE 0 É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL

VIMOS QUE $\nexists$ INTEGRAL PRIMEIRA.

$\Rightarrow$ ESTÁ DE ACORDO COM A PROPOSIÇÃO.

MAIS SOBRE PONTOS ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEIS

I) SISTEMAS LINEARES

PROPOSIÇÃO: SEJA $y'(t) = Ay(t)$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. LOGO EQUIVALEM.

(1) A ORIGEM É UM POÇO PARA A: $\lim_{t \to 0} e^{tA} x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(2) A É ATRATOR HIPERBÓLICO: A PARTE REAL DOS AUTOVALORES DE A É NEGATIVA.

(3) O FLUXO É CONTRATIVO: $\|e^{tA}\| \leq Ce^{-ct}$, $C > 0$, $c > 0$, $\forall t \geq 0$.

(4) A ORIGEM É PONTO DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

↳ É A NOVIDADE.

DEMO: JÁ TÍNHAMOS VISTO $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$.

$3) \Rightarrow 4)$.

i) 0 É EQUILÍBRIO ESTÁVEL

$\|x\| < \delta$

SEJA $\varepsilon > 0$, ENTÃO $\exists\ \delta := \frac{\varepsilon}{C}$ T.Q. SE $\|x - 0\| < \delta$, ENTÃO

$$\|\phi_t(x) - 0\| = \|e^{tA} x\| \leq Ce^{-ct}\|x\| < C\delta \leq \varepsilon.$$

↳ $\|e^{tA} x\| \leq \|e^{tA}\| \, \|x\|$. $\qquad \delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

ii) 0 É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL.

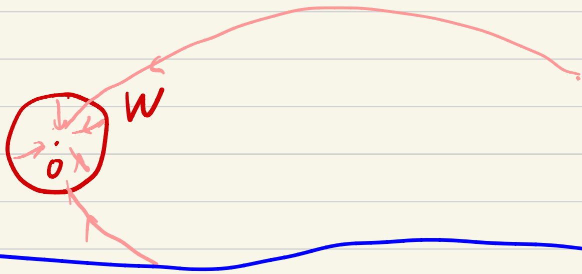
Se $x \in \mathbb{R}^n$, então $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t(x) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$.

Mas $\|e^{tA}x\| \leq Ce^{-\tau t}\|x\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

4) $\Rightarrow$ 1) Sabemos que $\exists\, W \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$ t.q. $0 \in W$ e $\lim\limits_{t\to\infty} e^{tA}x = 0$, $\forall x \in W$. Seja $B(0,\delta) \subset W$

$\hookrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < \delta\}$.

Logo $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ x\neq 0}} e^{tA}x = \lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{tA}\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\frac{2}{\delta}\|x\| = \frac{2}{\delta}\|x\| \lim\limits_{t\to\infty} e^{tA}\underbrace{\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\text{NORMA} = \frac{\delta}{2} < \delta} = 0.$



CONCLUSÃO: Dado $y'(t) = Ay(t)$. Para saber se 0 é assintoticamente estável, basta calcular os autovalores de A e verificar se a parte real de todos eles é negativa.

EX: MOLA COM ATRITO, $c > 0$, $k > 0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -kx - cy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda + c) + k = 0 \iff \lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\iff \lambda_\pm = -\frac{c}{2} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - 4k}}{2}}_{< c/2}$$

$\lambda_\pm$ TÊM PARTE REAL NEGATIVA

$\Rightarrow$ 0 É ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL

II) SISTEMAS NÃO LINEARES

$y'(t) = f(y(t))$, y_0 SINGULARIDADE

$$y'(t) = f(y(t) - y_0 + y_0) \approx \cancel{f(y_0)}^{0} + Df(y_0)(y(t) - y_0) = Df(y_0)(y(t) - y_0).$$

IDEIA: $\underbrace{\text{AUTOVALORES DE } Df(y_0) \text{ TEM PARTE REAL NEGATIVA}}$

$\Longrightarrow$ y_0 É ASSINT. ESTÁVEL

AMANHÃ PROVAREMOS