MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Lista de Exercícios sobre o Método dos Mínimos Quadrados

1: Usando o método dos mínimos quadrados de maneira conveniente, aproxime os pontos da tabela abaixo por uma função do tipo $a + bx$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	4	8

2: Um objeto foi lançado verticalmente do alto de um prédio. Sua altura foi registrada a cada segundo após o lançamento e os dados obtidos encontram-se na tabela abaixo.

Altura (m)	192	180	150	115	72
Tempo (s)	1	2	3	4	5

Utilize o método dos mínimos quadrados para estimar a altura do prédio h, a velocidade inicial de lançamento v_0 e o valor da aceleração da gravidade g.

3: (a) Determine uma base ortogonal, em relação ao produto interno

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois (com coeficientes reais).

(b) Determine os coeficientes a, b, c para os quais o valor da integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x - a - bx - cx^2\right)^2\,dx$$

seja o menor possível.

4: Seja $f(x) \;=\; \pi \;-\; |x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(a) Efetue a análise harmônica de f até o harmônico de terceira ordem.

(b) Determine o polinômio da forma $p(x) \;=\; a_0 + a_1x + a_2x^2$ que melhor aproxima f no intervalo dado segundo o produto interno:

$$\langle \phi, \psi\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\psi(x)dx.$$

(c) Qual das duas aproximações, a harmônica da parte (a) ou a polinomial da parte (b), é a que envolve o menor erro quadrático? Justifique.

5: Efetue a análise harmônica da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \;=\; \left|\,|x| - \frac{1}{4}\right|$$

até o harmônico de primeira ordem.

6: Os polinômios $\{1, x, x^2 - 1/3\}$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Use este fato para aproximar a função $f(t) = 1 - |2t - 5|$ no intervalo $[2, 3]$ por polinômios de grau menor ou igual a 2 pelo método dos mínimos quadrados (segundo o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{2}^{3} f(t)g(t)dt$).

7: Os preços de um ativo financeiro em 6 meses consecutivos ($t_i = i$, $i = 1,\ldots,6$) são os seguintes $R = (21.3, 21.8, 21.2, 21.3, 20.5, 21.0)$ (valores em reais). Desejamos estimar o comportamento dos preços segundo uma função linear $\bar{R}(t) = \alpha + \beta t$, atribuindo maior peso às observações mais recentes. Usaremos os seguintes pesos para os meses de 1 a 6: $\lambda = (0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$. Pede-se determinar: a reta de ajuste de mínimos quadrados $\bar{R}$, segundo o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i y_i$, e a volatilidade da amostra, isto é, o valor σ dado por $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i\big(R_i - \bar{R}(t_i)\big)^2$, onde R_i são as componentes do vetor R dos preços do ativo financeiro.

8: São dadas as funções $u = (-1/2, -1/2, 0, 3/2, 1/2)$, $v = (0, 1, -1, 1, 0)$, $w = (1, 2, 0, 1, 0)$ e $p = (1, 1, 1, 1, 1)$, todas elas definidas nos pontos $x_i = i$, $i = 1,\ldots,5$. Desejamos determinar a, b e c reais, tal que $\|f - p\|$ seja mínimo, onde $f = au + bv + cw$ e $\|f - p\|^2 = \sum_{i=1}^{5} \big(f(x_i) - p(x_i)\big)^2$.

(a) Escreva um sistema linear para a resolução deste problema.

(b) Verifique se o critério de Sassenfeld para convergência do método de Gauss-Seidel é satisfeito para este sistema.

(c) Reordene o sistema (através de uma reordenação dos vetores u, v e w) de forma a garantir a convergência do método de Gauss-Seidel para este sistema.

9: Sabe-se que $p(x) = 3x/4$ é o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima a função $f(x)$ no intervalo [-1,1] pelo método dos mínimos quadrados (com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$), onde $f(x) = x^2$, se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = -x^2$, se $x \in [-1, 0]$. Sabendo que as funções 1, x e $x^2 - 1/3$ são os 3 primeiros polinômios mônicos ortogonais em relacão ao produto interno dado, determine o polinômio de grau menor ou igual a 3 que melhor aproxima $f(x)$ em [-1,1] pelo MMQ.

10: É dada uma funcão contínua f, de período 4, linear em cada intervalo $[i, i + 1]$, $i \in \mathbb{Z}$, tal que $f(-2) = f(2) = 1$, $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(0) = 2$. Faça a análise harmônica de f até os harmônicos de ordem 2.

11: Mediu-se o valor de uma função f nos instantes 0, 1, 2 e 3, obtendo-se respectivamente os valores 0.6, 4.7, 40 e 365. Sabendo que $f(x)$ é da forma $f(x) = a3^{bx}$, utilize o método dos mínimos quadrados para estimar os valores de a e b.

12: Em uma fábrica dispõe-se de 3 máquinas para produção de 4 produtos (p_1, p_2, p_3 e p_4). A máquina m_1 produz 6 toneladas por hora, sendo 3 de p_1, 0 de p_2, 1 de p_3 e 2 de p_4, a máquina m_2 produz 6 toneladas por hora, sendo 2 de p_1, 1 de p_2, 2 de p_3 e 1 de p_4, enquanto que a máquina m_3 produz 5 toneladas por hora, sendo 1 de p_1, 3 de p_2, 0 de p_3 e 1 de p_4. A fábrica recebe um pedido de 11 toneladas de p_1, 7.9 de p_2, 6.4 de p_3 e 9.3 de p_4. Determine quantas horas deve ser utilizada cada máquina de maneira que a soma dos quadrados das diferenças entre as quantidades pedidas e produzidas de cada produto seja mínima.

13: Determine os termos gerais da Análise Harmônica da função 2π periódica ϕ_ϵ dada por: $\phi_\epsilon(x) = 1/\epsilon$ para $x \in [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ e $\phi_\epsilon(x) = 0$ para $x \in [-\pi, -\epsilon/2[$ e $x \in]\epsilon/2, \pi]$, onde $\epsilon < 1$. Como eles se comportam quando $\epsilon \to 0$?

14: Determine a, b e c de maneira a tornar mínimo o valor de:

$$\int_0^1 (a + bx + c\cos 2\pi x - \sin 2\pi x)^2\,dx$$

15: Aproxime a função tabelada abaixo por uma função do tipo

$$g(t) = \frac{100}{1 + \alpha e^{-\beta t}}$$

(determinando α e β), através de um método de mínimos quadrados discreto.

t	0	1	2	3	4	5	6
$F(t)$	10	15	23	33	45	58	69

MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

16: A tabela

r	2,70	2,00	1,61	1,20	1,02
θ	48°	67°	83°	108°	126°

foi gerada a partir de posições de um cometa em coordenadas polares convenientes. Sabendo-se que a órbita do cometa é descrita pela lei de Kepler

$$r = \frac{p}{1 - e \ \cos\theta},$$

estime p e e usando o método dos mínimos quadrados.

17: A tabela

x	1	2	3	4	5
y	102	91	70	39	2

foi gerada a partir de medidas de posição de um objeto arremessado do alto de um edifício, onde y é a altura do objeto (em metros) e x é a sua distância ao edifício na direção horizontal.

i) Use o método dos mínimos quadrados para estimar a trajetória (suponha um movimento uniformemente acelerado sob a ação de $g = 10\ m/s^2$).

ii) Que estimativa se obtém para a altura do edifício e para a velocidade de lançamento do objeto?

Sugestão: Utilize $y(x) = a + b\ (x-3) + c\ (x-3)^2$ para simplificar as contas.

18: Considere o sistema linear sobredeterminado

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Qual sistema linear se obtém ao resolvê-lo pelo MMQ? (Corresponde ao cálculo da projeção ortogonal do lado direito do sistema no espaço gerado pelos 3 vetores formados pelas colunas da matriz)

ii) O sistema resultante pode ser resolvido por Gauss-Seidel? Justifique.

iii) Resolva-o por eliminação de Gauss com 2 algarismos significativos e condensação pivotal.

19: Seja $w(x)$ definida no intervalo $[\frac{1}{3}, 1]$ como $w(x) = e^{|3x-2|} + q(x)$, onde $q(x)$ é um polinômio de grau 2. São dados os 3 primeiros polinômios ortogonais em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$: $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2 - 1/3$ e que $\langle p_0, p_0\rangle = 2$, $\langle p_1, p_1\rangle = 2/3$, $\langle p_2, p_2\rangle = 8/45$.

a) Determine o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $w(x)$ segundo a norma dada pelo produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)g(x)dx$. Calcule o erro quadrático;

b) Construa uma partição com 5 pontos igualmente espaçados de $[\frac{1}{3}, 1]$ e calcule $w(x)$ nesses pontos. Aproxime essa tabela por um polinômio de grau 2. Calcule o erro quadrático;

c) Use os polinômios de Legendre p_0, p_1, p_2 e aproxime a função $w(x)$;

d) As funções aproximadoras obtidas em (a) e (c) são iguais? Justifique sua resposta.

20: Os polinômios 1, x, $x^2 - 1/3$ e $x^3 - 3x/5$ são ortogonais em relação ao produto interno $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Use-os para obter os polinômios mônicos ortogonais em relação ao produto interno $\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$. Qual o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(x) = x^3$ em $[-2, 2]$ em relação a este produto interno? (pense!)

21: Faça a análise harmônica da função 2π-periódica $f(x)$, onde $f(x) = x(2\pi - x)/\pi^2$ em $[0, 2\pi]$, até o harmônico de primeira ordem. Nos cálculos dos produtos internos envolvendo f você deve utilizar o método de n-Simpsons. Mostre que em duas das integrais o uso de 1-Simpsons já produz o valor exato da integral, justificando. A integral restante deve ser avaliada por 4-Simpsons. Estime o erro na amplitude do primeiro harmônico.

22: Considere a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, definida no intervalo $[-2, 1]$.

a) Aproxime f por um polinômio g_1 de segundo grau, utilizando o MMQ.

b) Aproxime f por um polinômio g_2 da forma $g_2(x) = \sum_{k=0}^{2} b_k L_k(x)$, onde os L_k são os polinômios de Legrende, ortogonais segundo o produto interno

$$< h_i, h_j >= \int_{-1}^{1} h_i(x)h_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \dfrac{2}{2i+1}, & i = j \end{cases}$$

c) Construa os três primeiros polinômios mônicos q_k, $k = 0, 1, 2, ...$ ortogonais segundo o produto interno

$$< h_i, h_j >= \int_{-2}^{1} h_i(x)h_j(x)dx$$

e aproxime f por g_3 da forma $g_3(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k q_k(x)$

d) Avalie $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ e $g_2(\alpha)$ para $\alpha = \{-2, -1, 0, 1\}$ e identifique, para cada α, qual é a melhor aproximação obtida, considerando como medida o erro absoluto.

23: (MMQ contínuo)

a) Um polinômio mônico de grau 3 é um polinômio da forma $p(x) = x^3 + p_2(x)$, onde $p_2(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a 2. Mostre que dentre os polinômios mônicos de grau 3,
$p(x) = x^3 - 2.4x$ é o de menor norma, sendo a norma de um polinômio dada por $||p(x)|| = \int_{-2}^{2} p^2(x)dx$.

b) Determine a, b e c para os quais o valor da integral $\int_{-1}^{1} \left(\cos(x) - a - bx - cx^2\right)^2 dx$ seja o menor possível (apresente os cálculos de todas as integrais necessárias para a resolução da questão).

Dica: considere os polinômios $\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2 - 1/3\}$ e a seguinte tabela de integrais

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)dx = 2 \qquad \int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} p_1(x)p_3(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)dx = \tfrac{2}{3} \qquad \int_{-1}^{1} p_2(x)p_3(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)p_3(x)dx = 8/45.$$

24: Mediu-se o valor aproximado de uma função f, obtendo-se os seguintes valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	2	8	4	1

Sabendo que f é da forma $f(x) = \alpha 2^{\beta(x-\gamma)^2}$;

a) Utilize o método dos mínimos quadrados para estimar os valores de α, β e γ. Mostre todas as etapas da linearização, da montagem do sistema, e resolva o sistema analiticamente ou com algum método númerico ensinado na disciplina (Eliminação de Gauss, Jacobi ou Gauss-Seidel).

b) Calcule o erro cometido na aproximação.

Observação: $\log_b(x) = \dfrac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(b)} = \dfrac{\log_e(x)}{\log_e(b)}$.

25: Considere a função 2π-periódica definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ f(x) &= 0, \qquad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \\ f(x) &= x - \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi, \end{aligned}$$

a) Faça a análise harmônica de f até o harmônico de ordem 2.

b) Deseja-se obter uma aproximação da forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

para a solução da equação diferencial

$$-t''(x) + t(x) = f(x)$$

onde f é a função do item a). Calcule a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2.

26: Conhece-se os seguintes valores de uma função: $f(0.25) = 0.082$, $f(0.5) = 0.27$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4.3$ e $f(4) = 21$. Aproxime $f(x)$ por uma função do tipo $g(x) = ax^{b + c\log_2 x}$ segundo um método dos mínimos quadrados (discreto).

27: Aproxime $f(x) = |x|^{\frac{3}{4}}$ em $[-1, 1]$ por um polinômio de grau menor ou igual a dois pelo método dos mínimos quadrados, em relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

28: Os polinômios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - 1$ e $p_3(x) = x^3 - 4x$ são ortogonais em relação a um produto interno, para o qual sabemos que $\langle p_i, p_i\rangle = i + 1$, $i = 0, 1, 2, 3$.

a) Sendo $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i p_i(x)$ determine $||p||^2 = \langle p, p\rangle$ em função de seus coeficientes a_i.

b) Se $p(0) = 1$ qual o menor valor que $||p||^2$ pode assumir?

c) Dentre os polinômios de grau menor ou igual a 3 com $p(0) = 1$ qual terá a menor norma?

29: Seja $f(x) = 1 - |x|$, definida para $-1 \le x \le 1$. Encontre a e b reais que minimizam a integral

$$\int_{-1}^{1} \left[f(x) - ax^2 - b\right]^2 dx.$$

Trabalhe com frações e forneça a resposta exata.

30: As coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ no plano podem ser deteminadas conhecendo-se a distância dele a três pontos de referência $P_i = (p_i, q_i)$, $i = 1, 2, 3$, não colineares. Se P está próximo à origem e os pontos de referência longe dela, a distância d_i de P a P_i pode ser aproximada pela expressão $d_i = r_i - \frac{p_i x}{r_i} - \frac{q_i y}{r_i}$ onde $r_i = \sqrt{p_i^2 + q_i^2}$. As medidas das distâncias estão sujeitas a erros. Foram medidas as distâncias $d_1 = 49.4$, $d_2 = 49.6$ e $d_3 = 51.2$ em relação aos pontos $P_1 = (50, 0)$, $P_2 = (-30, 40)$ e $P_3 = (-30, -40)$, respectivamente. Determine as coordenadas de P resolvendo o sistema linear sobredeterminado para (x, y) segundo o MMQ.