Quádricas

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA / USP

1 de julho de 2020

Forma Geral

- Uma equação geral de segundo grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G + Hxy + Iyz + Jxz = 0$$

- Uma superfície cuja equação é do tipo acima é denominada de superfície quádrica.
- Através de uma rotação e/ou translação de eixos a equação geral de segundo grau pode assumir uma forma cêntrica ou não cêntrica.

Quádricas cêntricas

- Se a equação inicial pode ser representada por

$$a\bar{x}^2 + b\bar{y}^2 + c\bar{z}^2 + d = 0$$

  a superfície é uma quádrica cêntrica.
- O tipo de quádrica dependerá do sinal dos coeficientes a, b, c e d. Assim:
  - Todos os sinais iguais, podemos expressar:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$$

elipsoide

Quádricas cêntricas

– Dois sinais positivos e um negativo:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}-\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1$$ **hiperbolóide de uma folha**

– Um sinal positivo e dois negativos:

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{y}^2}{b^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1$$ **hiperbolóide de duas folhas**

Elipsoide

$$\frac{\bar{\boldsymbol{x}}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\bar{\boldsymbol{y}}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\bar{\boldsymbol{z}}^2}{\boldsymbol{c}^2}=1 \qquad \boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2 \ \text{ e } \ \boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{c}^2$$

- Interseções com os eixos:

$$O\bar{X} \Rightarrow \bar{y}=\bar{z}=0 \Rightarrow \bar{x}=\pm a \Rightarrow P_X=(\pm a,0,0)$$

$$O\bar{Y} \Rightarrow P_Y=(0,\pm b,0)$$

$$O\bar{Z} \Rightarrow P_Z=(0,0,\pm c)$$

- Os traços sobre os planos coordenados, são elipses em

$XY:$ $$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1$$

$XZ:$ $$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1$$

$YZ:$ $$\frac{\bar{y}^2}{b^2}+\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1$$

Elipsoide

- Seções por planos paralelos aos planos coordenados

$Plano // XY : (z = k)$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$ é uma elipse para $-c < k < c$

$Plano // XZ : (y = k)$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$ é uma elipse para $-b < k < b$

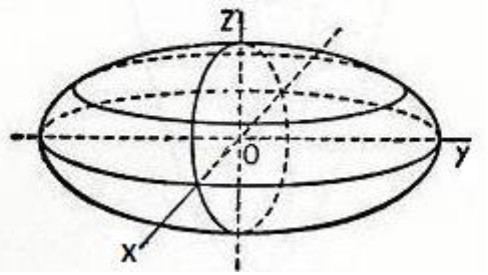
$Plano // YZ : (x = k)$

é uma elipse para $-a < k < a$

$$\frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

Analisando o Elipsoide

- Um esboço do elipsóide está a seguir:



- É uma superfície simétrica a todos os eixos coordenados, a todos os planos coordenados e à origem.

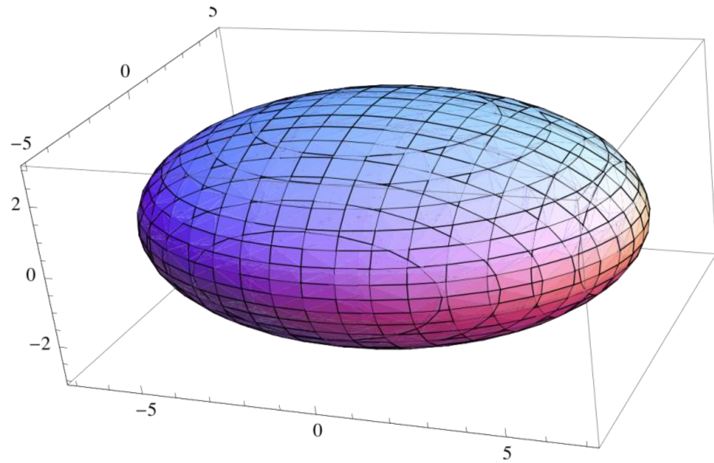
Exemplo de elipsoide - Processo

- Elipsoide

$$225x^2 + 441y^2 + 1225z^2 = 11025$$

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

$$Centro = C = (0,0,0)$$

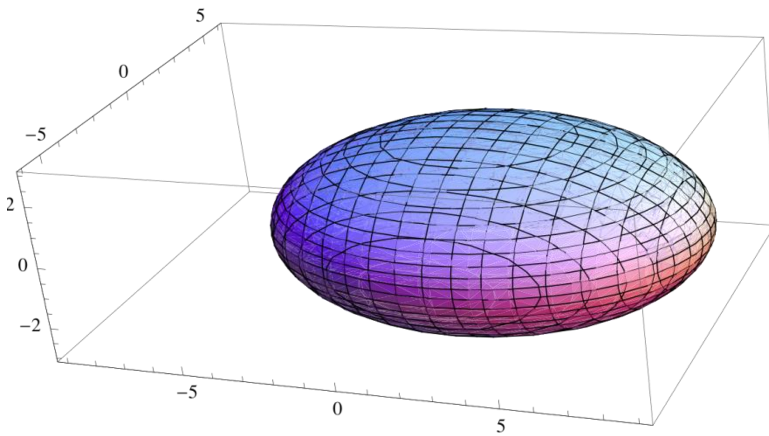


- Elipsóide transladado

$$225x^2 - 900x + 441y^2 - 882y + 1225z^2 + 2450z = 8459$$

$$\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$$

$$C = (2,1,-1)$$



- Translação:

$$\frac{x'^2}{49} + \frac{y'^2}{25} + \frac{z'^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \\ z' = z + 1 \end{cases}$$

Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{\bar{\boldsymbol{x}}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\bar{\boldsymbol{y}}^2}{\boldsymbol{b}^2}-\frac{\bar{\boldsymbol{z}}^2}{\boldsymbol{c}^2}=1 \qquad \boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2$$

- Interseções com os eixos:

$$O\bar{X} \Rightarrow \bar{y}=\bar{z}=0 \Rightarrow \bar{x}=\pm a \Rightarrow P_X=(\pm a,0,0)$$

$$O\bar{Y} \Rightarrow P_Y=(0,\pm b,0)$$

$$O\bar{Z} \Rightarrow Não\_existe$$

- Os traços sobre os planos coordenados, são:

$$XY: z=0 \qquad XZ: y=0 \qquad YZ: x=0$$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1 \qquad \frac{\bar{x}^2}{a^2}-\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1 \qquad \frac{\bar{y}^2}{b^2}-\frac{\bar{z}^2}{c^2}=1$$

elipse *hipérbole* *hipérbole*

Hiperbolóide de uma folha

- Seções por planos paralelos aos planos coordenados

$$Plano\,//\,XY:(z=k)$$

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}$$ são elipses para qualquer k

$$Plano\,//\,XZ:(y=k)$$

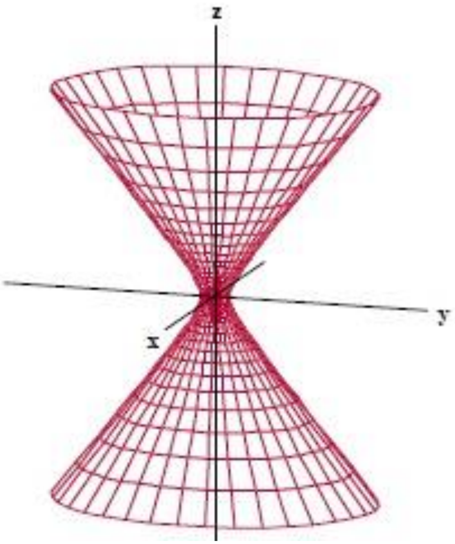
$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}-\frac{\overline{z}^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}$$ são hipérboles

$$Plano\,//\,YZ:(x=k)$$

$$\frac{\overline{y}^2}{b^2}-\frac{\overline{z}^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}$$ são hipérboles

Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Hiperbolóide de duas folha

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$$

- Interseções com os eixos:

$$O\bar{X} \Rightarrow P_X = (\pm a, 0, 0)$$
$$O\bar{Y} \Rightarrow Não\_existe$$
$$O\bar{Z} \Rightarrow Não\_existe$$

- Os traços sobre os planos coordenados, são:

$XY : z = 0$

$$\frac{\bar{x}^2}{b^2} - \frac{\bar{y}^2}{c^2} = 1$$

hipérbole

$XZ : y = 0$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = 1$$

hipérbole

$YZ : x = 0$

Conjunto
Vazio

Hiperbolóide de duas folhas

- Seções por planos paralelos aos planos coordenados

$$Plano // XY : (z = k)$$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} + 1$$ são hipérboles

$$Plano // XZ : (y = k)$$

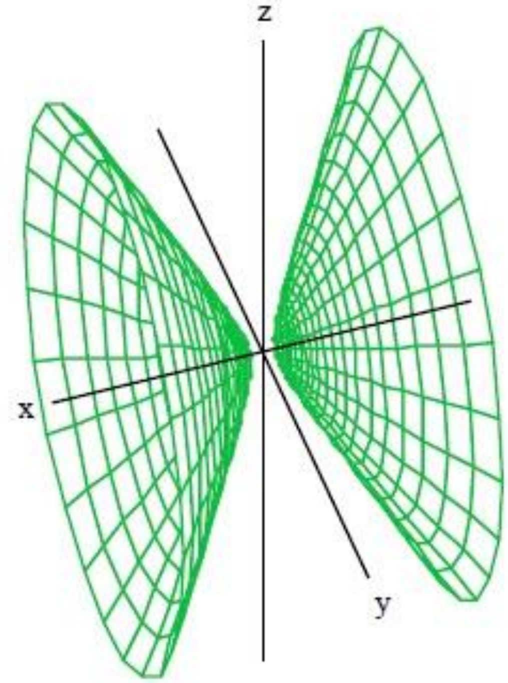
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{z}^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} + 1$$ são hipérboles

$$Plano // YZ : (x = k)$$

$$\frac{\bar{y}^2}{b^2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$$ são elipses para $|k|>a$

Hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

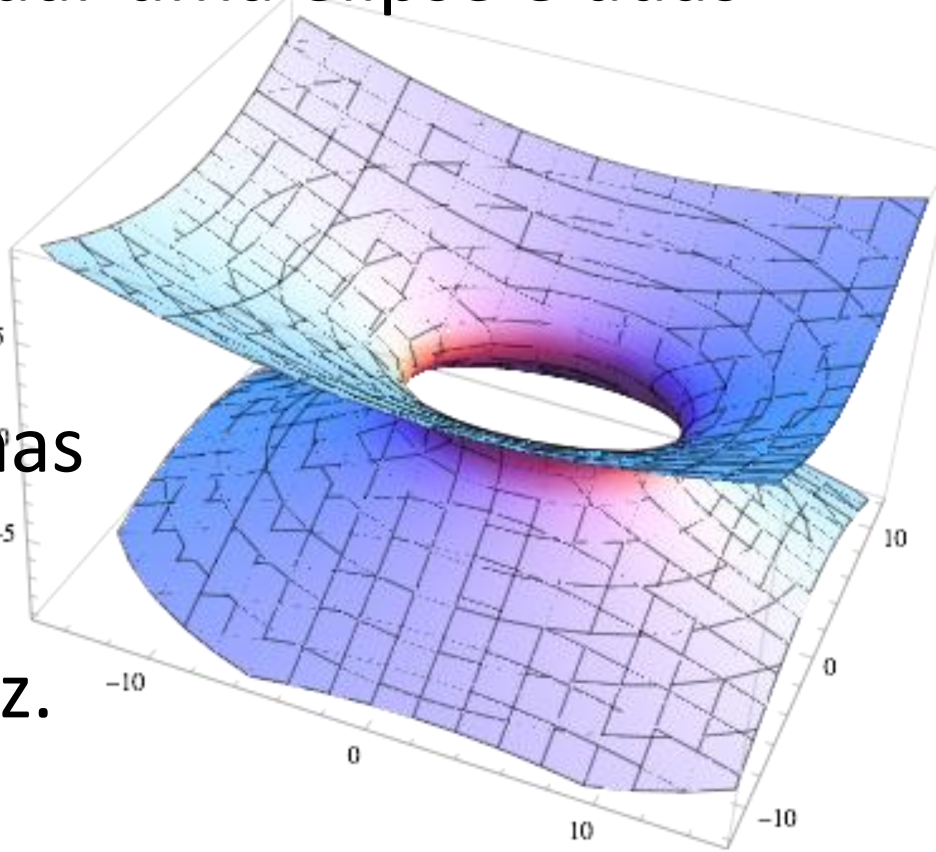


Hiperbolóide de uma folha

- Observe que a interseção com plano coordenado pode dar uma elipse e duas hipérboles

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$$

- Exemplo:
- Idem a elipsoide mas
- com sinal negativo
- para os termos de z.



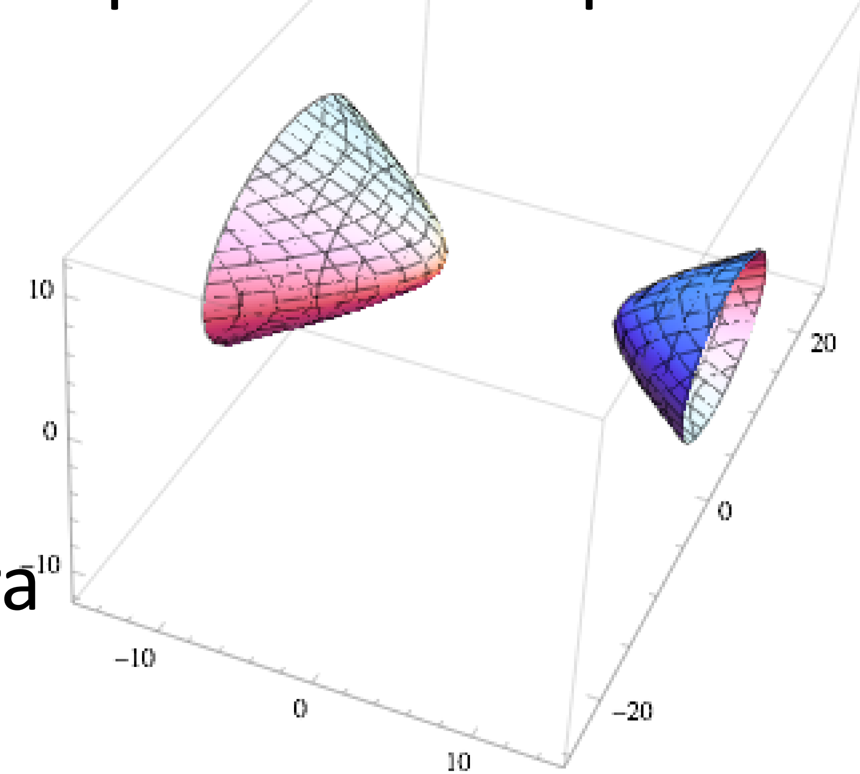
Hiperbolóide de duas folha

- Observe que a interseção com plano coordenado pode dar apenas duas hipérboles

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

- Exemplo:
- Como elipsóide mas

com sinal negativo para os termos em y e z.



Quádricas não cêntricas

Quádrica não cêntrica

- Se na equação de segundo grau, uma das variáveis só considera um termo linear, e as outras são quadráticas

$$A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 = C\bar{z} \quad \rightarrow A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$$

a superfície é uma quádrica não cêntrica.

- Da expressão fornecida, sempre pode se escrever:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} \pm \frac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z} \quad onde \Rightarrow c \in \mathbf{R} \wedge c \neq 0$$

Quádrica não cêntrica

- Nas coordenadas originais temos as formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad onde \Rightarrow c\in\mathbf{R}\wedge c\neq 0$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{b^2}=cy$$

$$\pm\frac{y^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{b^2}=cx$$

- Assim, a diferença principal das formas é o sinal dos quadrados, iguais ou diferentes.

Parabolóide elíptico

- Quando os sinais dos termos quadráticos são iguais:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z}$$

- Pontos de interseção com qualquer eixo:

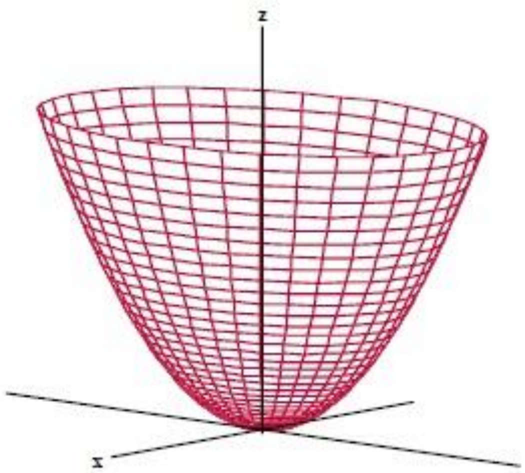
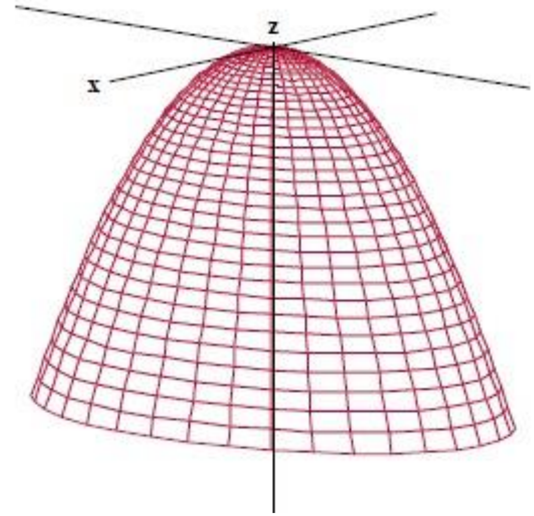
$$P_I = (0,0,0)$$

- Observar que se $c > 0$, a superfície toda está acima do plano coordenado $\overline{X}\overline{Y}$. Caso contrário, está completamente abaixo dele.

Parabolóide elíptico

- Traços:
  - Eixo $\overline{X}\overline{Y} \Rightarrow \bar{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} + \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = 0 \Rightarrow P = (0,0,0)$
  - Eixo $\overline{Y}\overline{Z} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z}$ parábola
  - Eixo $\overline{X}\overline{Z} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} = c\bar{z}$ parábola
- Seções:
  - Plano $// \overline{X}\overline{Y} \Rightarrow \bar{z} = k > 0 \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} + \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = ck$ elipses
  - Plano $// \overline{Y}\overline{Z} \Rightarrow x = k \Rightarrow \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z}$ parábolas
  - Plano $// \overline{X}\overline{Z} \Rightarrow y = k \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} = c\bar{z}$ parábolas

Parabolóide elíptico

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad (c>0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad (c<0)$
	

Parabolóide hiperbólico

- Quando os sinais dos termos quadráticos são contrários: Analisamos para $c > 0$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = c\bar{z}$$

- Pontos de interseção com qualquer eixo:

$$P_I = (0,0,0)$$

Parabolóide hiperbólico

- Traços:
  - Eixo $\overline{X}\overline{Y} \Rightarrow \overline{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\overline{x}^2}{a^2} - \dfrac{\overline{y}^2}{b^2} = 0$

    $$\frac{\overline{y}^2}{b^2} - \frac{\overline{x}^2}{a^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\overline{y}}{b} - \frac{\overline{x}}{a}\right)\left(\frac{\overline{y}}{b} + \frac{\overline{x}}{a}\right) = 0 \Rightarrow \overline{y} = \pm\frac{b}{a}\overline{x}$$

    portanto são duas retas.
  - Eixo $\overline{Y}\overline{Z} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \dfrac{\overline{y}^2}{b^2} = c\overline{z}$ parábola
  - Eixo $\overline{X}\overline{Z} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \dfrac{\overline{x}^2}{a^2} = c\overline{z}$ parábola

Parabolóide hiperbólico

- Seções:
  - Plano $// \overline{X}\overline{Y} \Rightarrow \bar{z} = k \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} - \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = ck$

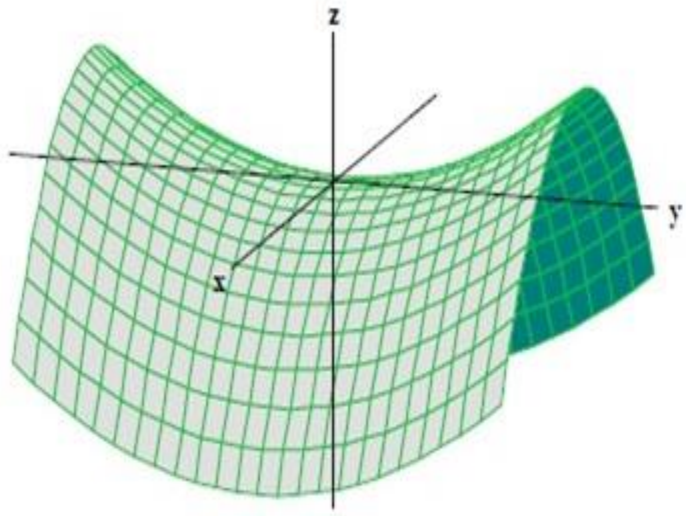
    que são hipérboles:

    Se $k > 0$, o eixo focal é paralelo ao eixo $\overline{X}$,

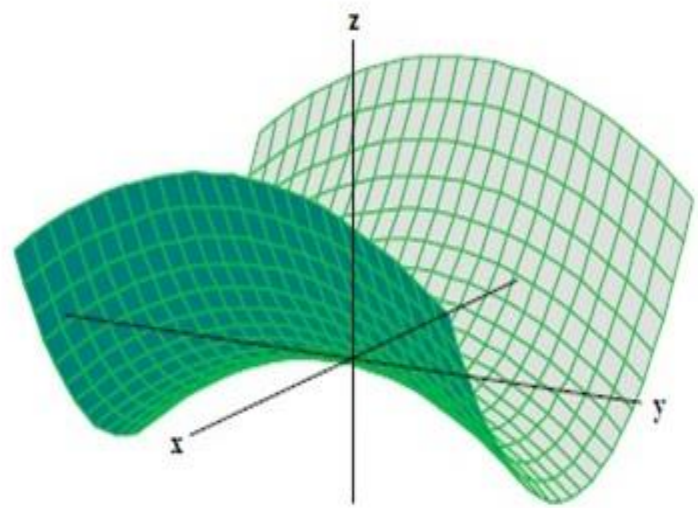
    e se $k < 0$, o eixo focal é paralelo ao eixo $\overline{Y}$
  - Plano $// \overline{Y}\overline{Z} \Rightarrow x = k \Rightarrow \dfrac{\bar{y}^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - c\bar{z}$ parábolas
  - Plano $// \overline{X}\overline{Z} \Rightarrow y = k \Rightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{a^2} = c\bar{z} + \dfrac{k^2}{b^2}$ parábolas

Parabolóide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \qquad (c < 0)$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \qquad (c > 0)$$



Exemplo com parte mista e linear

- Forneça o(s) vértice(s) da quádrica:

$$3\boldsymbol{z}^2 + 3\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{yz} - \boldsymbol{x} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{y} - 2\sqrt{2}\boldsymbol{z} = 1$$

e o(s) vértice(s) da seção, se existir, em: $x = -\dfrac{21}{5}.$

Autovalores: $\lambda_1 = \frac{7}{2}, \lambda_2 = \frac{5}{2}, \lambda_3 = 0.$

Autovetores: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{7}{2}\bar{x}^2 + \frac{5}{2}\bar{y}^2 - 4\bar{y} = \bar{z} + 1$$

Multiplicando vezes dois:

Exemplo com parte mista e linear

$$7\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 - 8\bar{y} = 2\bar{z} + 2$$
$$7\bar{x}^2 + 5(\bar{y}^2 - \tfrac{8}{5}\bar{y}) = 2\bar{z} + 2$$
$$7\bar{x}^2 + 5(\bar{y} - \tfrac{4}{5})^2 = 2(\bar{z} + \tfrac{13}{5})$$

Temos a translação:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \bar{x} \\ \tilde{y} = \bar{y} - \frac{4}{5} \\ \tilde{z} = \bar{z} + \frac{13}{5} \end{cases}$$

$$7\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 = 2\tilde{z}$$

Exemplo com parte mista e linear

- Sabemos que o vértice nos eixos adequados é

$$V = (0,0,0)_{\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}}$$

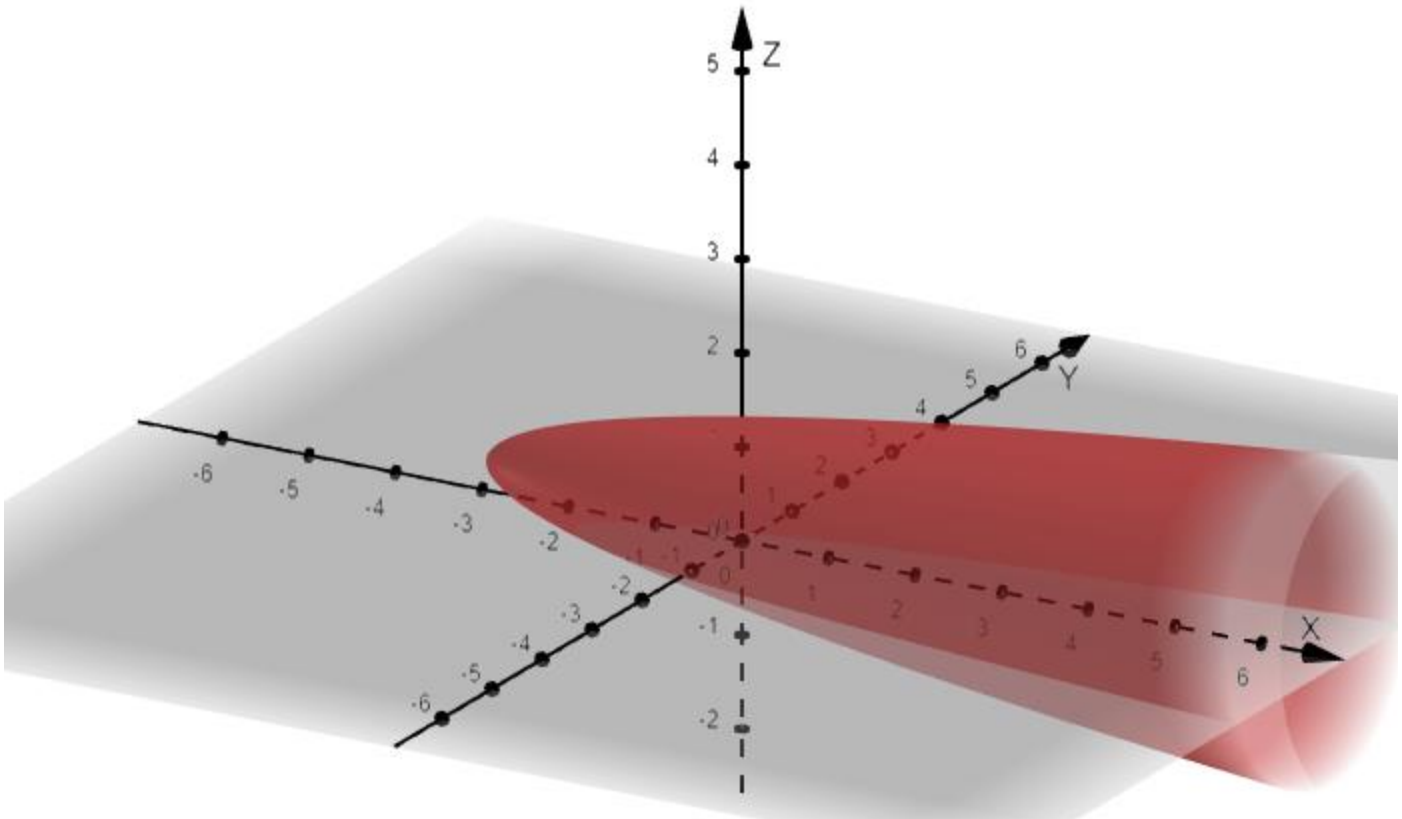
Pela translação: $\begin{cases} 0 = \bar{x} \\ 0 = \bar{y} - \frac{4}{5} \\ 0 = \bar{z} + \frac{13}{5} \end{cases} \rightarrow V = (0, \frac{4}{5}, -\frac{13}{5})_{\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}}$

E utilizando a rotação dada pela $X = P\bar{X}$

$$V = (-\frac{13}{5}, \frac{17}{10}\sqrt{2}, \frac{-9}{10}\sqrt{2})_{XYZ} \cong (-2.6, 2.4, -1.27)_{XYZ}$$

Exemplo com parte mista e linear

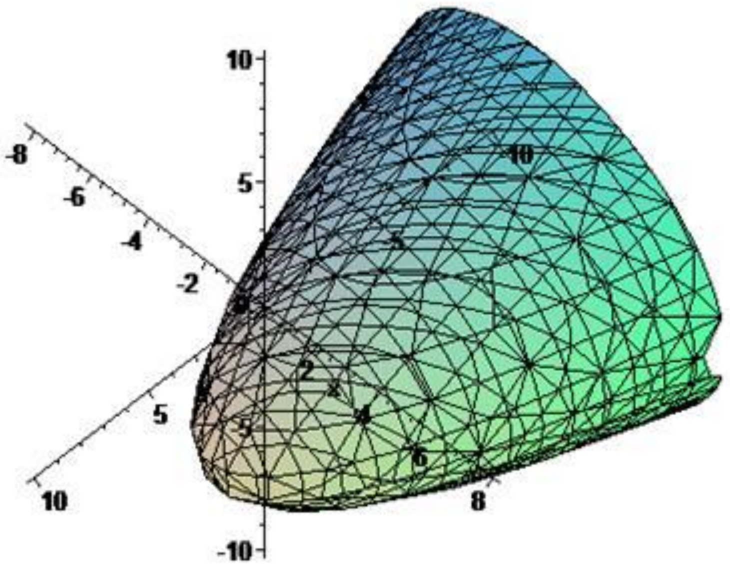
$$3z^2 + 3y^2 + yz - x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z = 1$$



Outro exemplo

Identifique a superfície a seguir e determine o vértice:

$$3z^2 + 3y^2 + yz - 10\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 6z = 14$$



Exercícios de aplicação

1. Dada a equação

$$x^2 - 4y^2 + 5z - 2x = 16$$

Se for uma quádrica, determine o tipo da mesma e a seção no plano com $z = 2$, informando seus elementos da seção.

2. Determine a quádrica

$$x^2 - z^2 - 4z - 2x - 4y + 4 = 0$$

e analise as seções para $y = k$