Os espaços vetoriais
$\mathbb{R}^{n}\ (\mathbb{R}^{2}, \mathbb{R}^{3})$

ZAB0161 – "Álgebra linear com aplicações em geometria analítica"

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

20 de abril de 2020

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Soma de vetores com n componentes

Soma de reais

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam x e $y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Multiplicação de reais

Multiplicação vezes escalar de um vetor com n componentes

$(\mathbb{R}^n, +,)$ é um espaço vetorial.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

$(\mathbb{R}^n, +,)$ é um espaço vetorial.

Uma base para $\mathbb{R}^n$.

$$\beta = \{(1,0, \dots, 0), (0,1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0,1)\}$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Observar: Para cada n temos um conjunto: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$

Assume-se que $\mathbb{R}$, com sus operações e propriedades, já foi estudado pelos alunos da presente disciplina.

Espaços de interesse: $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- Os principais espaços vetoriais a estudar são:

  O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ chamado de Plano,

  O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ chamado de Espaço.

- Cada espaço com as operações usuais de soma e multiplicação vezes escalar (para duplas e triplas).
- Realizaremos as extensões para os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$.

Espaços de interesse: $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- Os principais espaços vetoriais a estudar são:

  O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ chamado de Plano,

  O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ chamado de Espaço.
- Cada espaço com as operações usuais de soma e multiplicação vezes escalar (para duplas e triplas).
- Realizaremos as extensões para os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$.
- Podemos considerar que nós estamos no espaço

$$\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t) \;/\; x, y, z, t(\text{tempo}) \in \mathbb{R}\}.$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

A base canônica(simples) de $\mathbb{R}^2$ é

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \;/\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

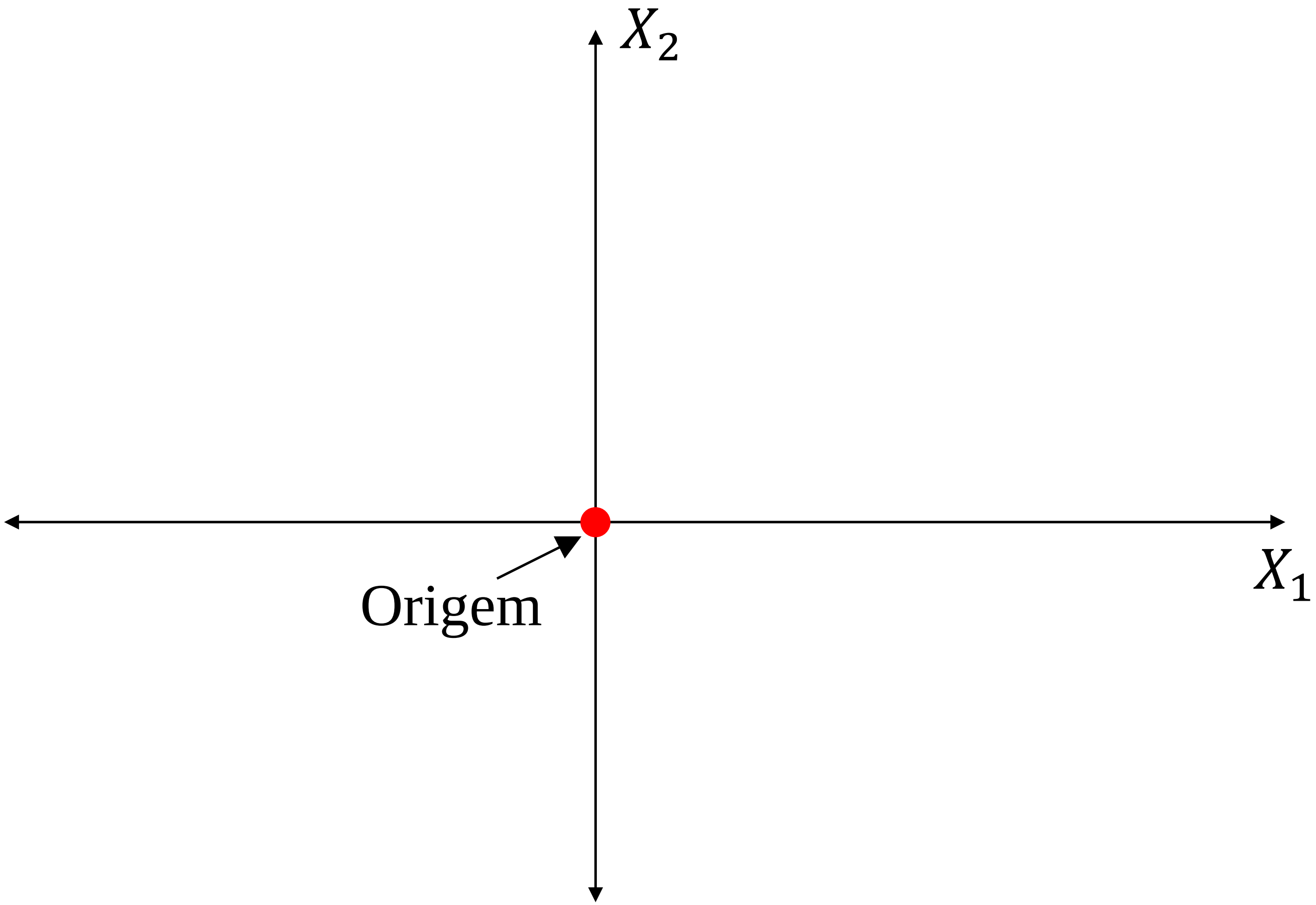
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

Sua representação se dá em um **plano cartesiano**, no qual é escolhido um ponto de referência chamado origem, uma reta horizontal X_1 (eixo de abcissas) passando pela origem, e outra reta vertical X_2 (eixo de ordenadas) também passa pela origem.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Se $x \in \mathbb{R}^2$ escreve-se $x = (x_1, x_2)$ onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Cada dupla é representado graficamente como um ponto, onde:

1. à origem é considerada como ponto de partida.
2. a primeira componente representa um deslocamento desde a origem na orientação da reta X_1, com sentido definido pelo sinal da componente, e
3. a segunda componente representa um segundo deslocamento na orientação da reta X_2.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

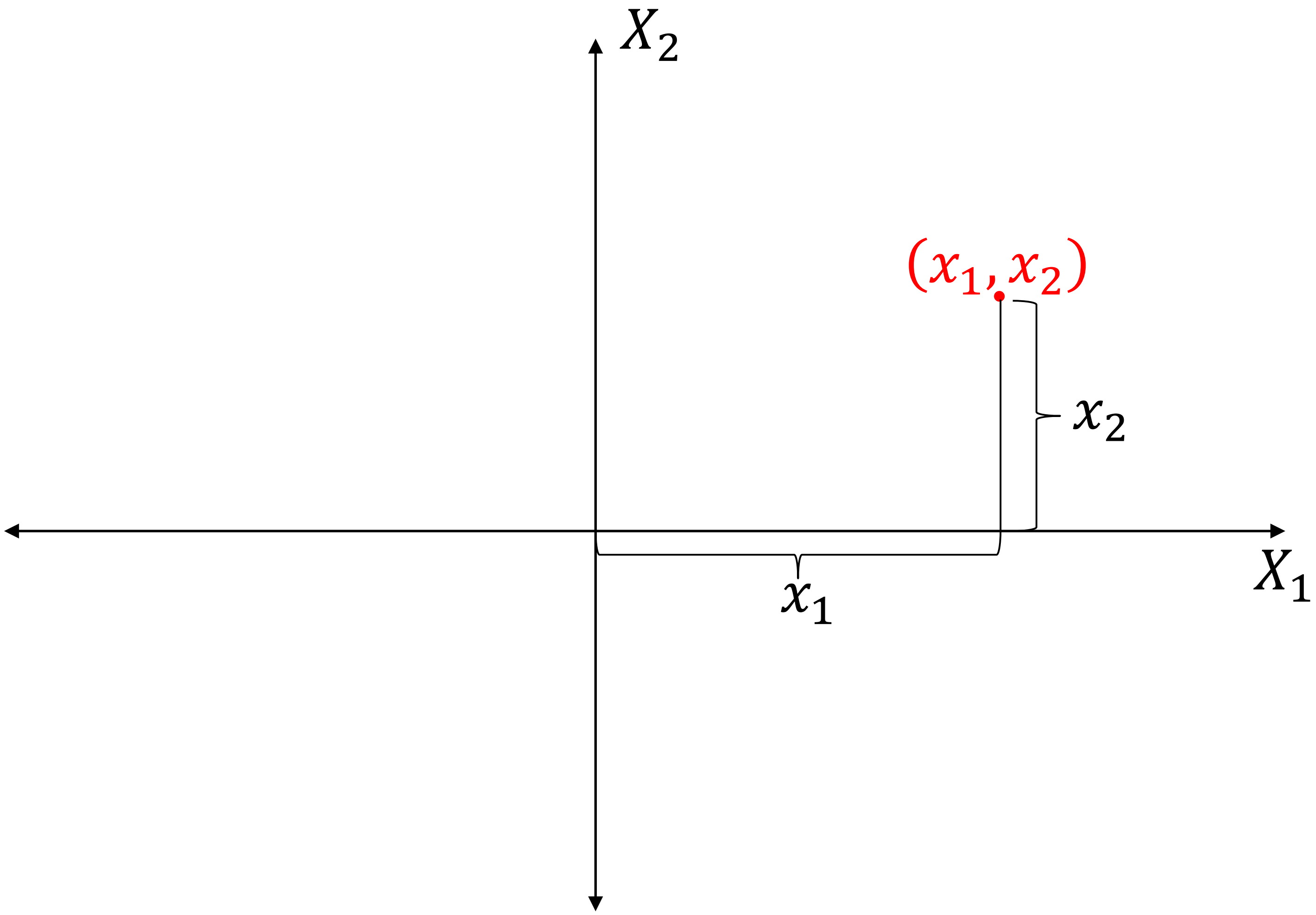
Se $x \in \mathbb{R}^2$ escreve-se $x = (x_1, x_2)$ onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

A posição final alcançada, um ponto, é a representação da dupla.

Isto é uma associação:

Associamos um ponto do plano cartesiano com uma dupla de números reais, ou elemento de $\mathbb{R}^2$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



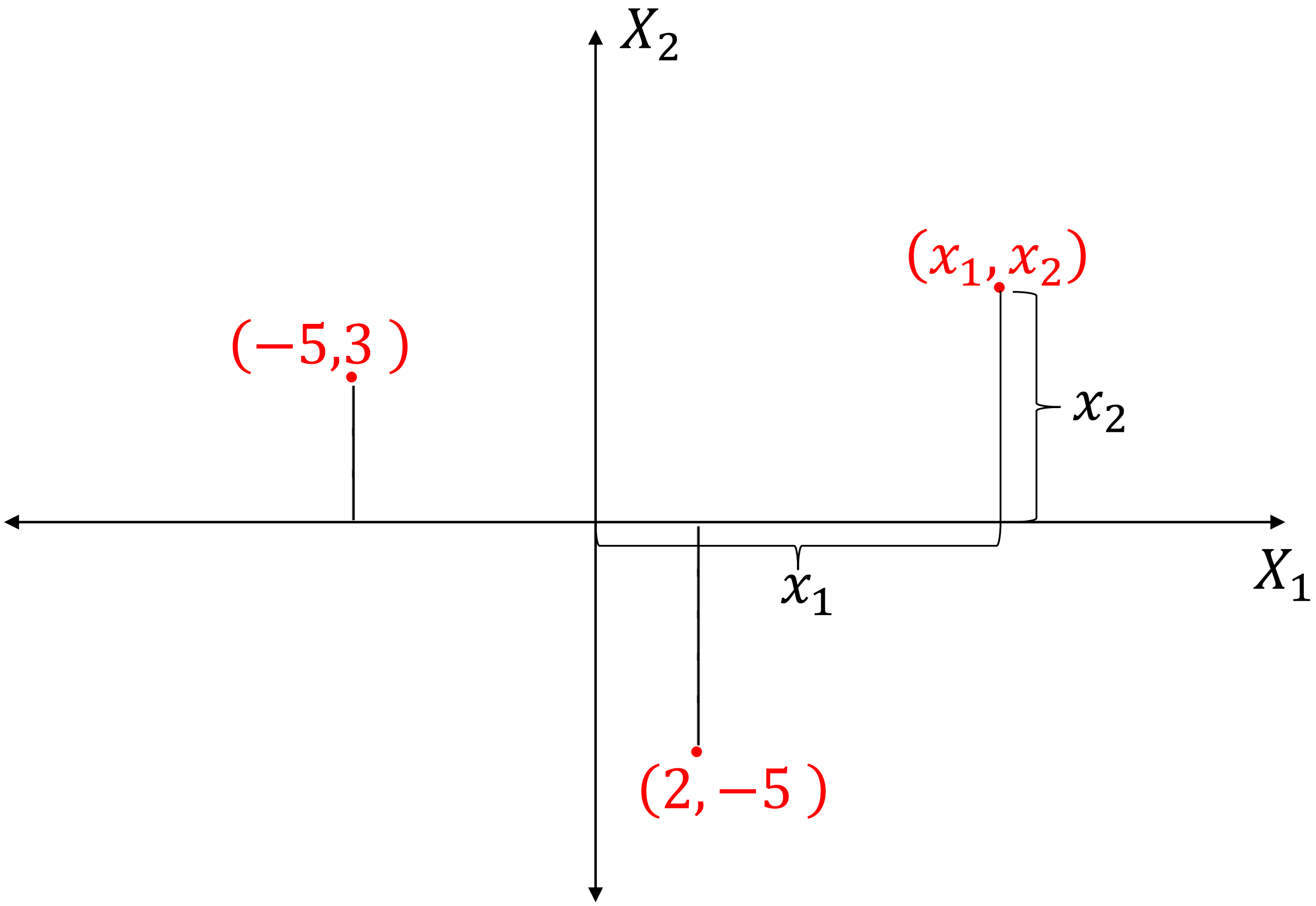
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Se $x \in \mathbb{R}^2$ escreve-se $x = (x_1, x_2)$ onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

Vide as duplas $(-5,3)$ e $(2,-5)$ no plano cartesiano.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Observar a soma:

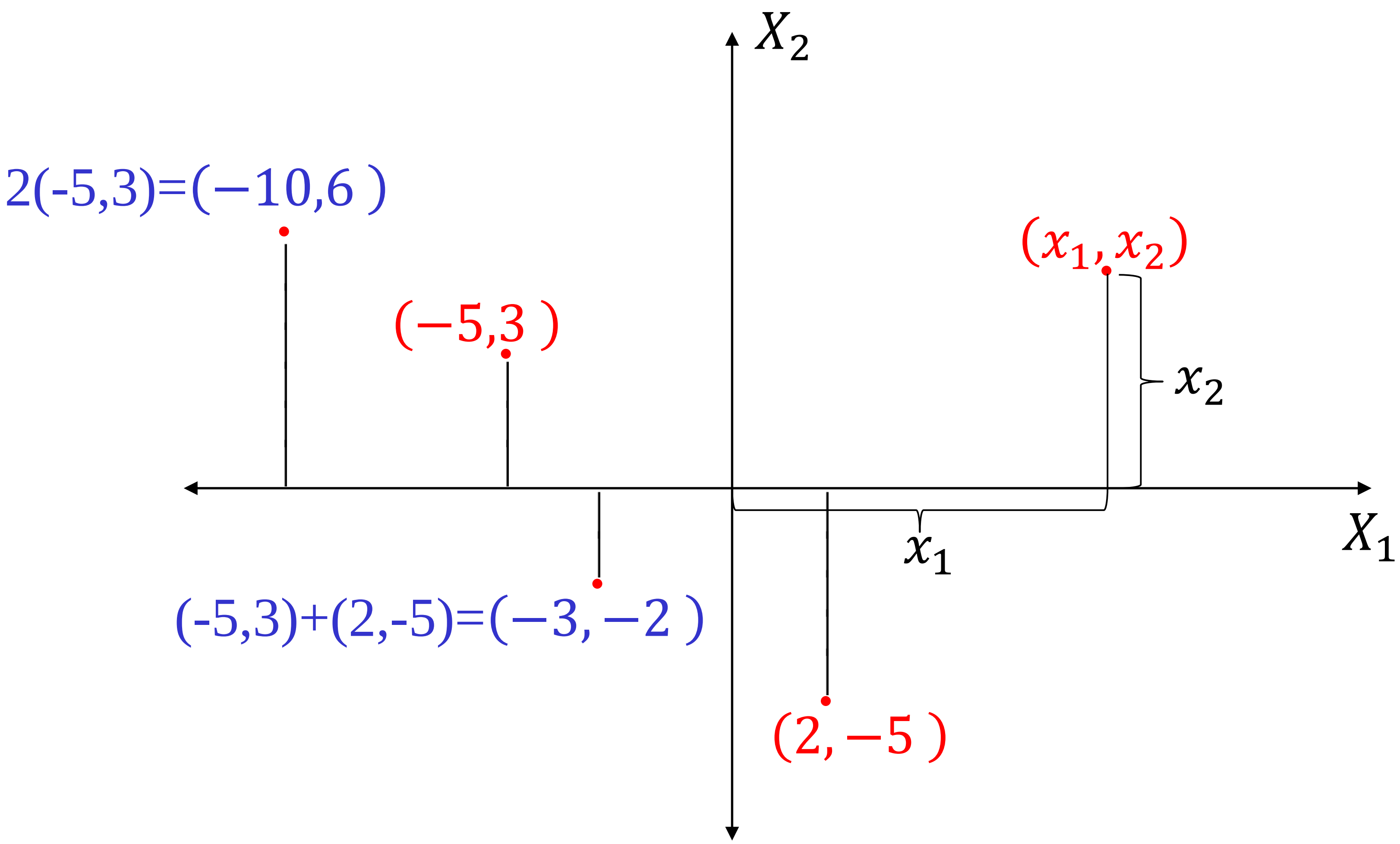
$$(-5,3) + (2,-5) = (-3,-2)$$

Interpretando as duplas como pontos, **como entender a soma de pontos e o resultado um outro ponto?**

Como entender a multiplicação de um escalar vezes um ponto? e o resultado é outro ponto?

$$2(-5,3) = (-10,6)$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Observar a soma:

$$(-5,3) + (2,-5) = (-3,-2)$$

Mas, se considerarmos as duplas como os deslocamentos realizados (conforme foi descrito anteriormente) teriamos que uma soma de deslocamentos (dois horizontais e dois verticais) daria como resultado um deslocamento horizontal total e um resultado vertical total.

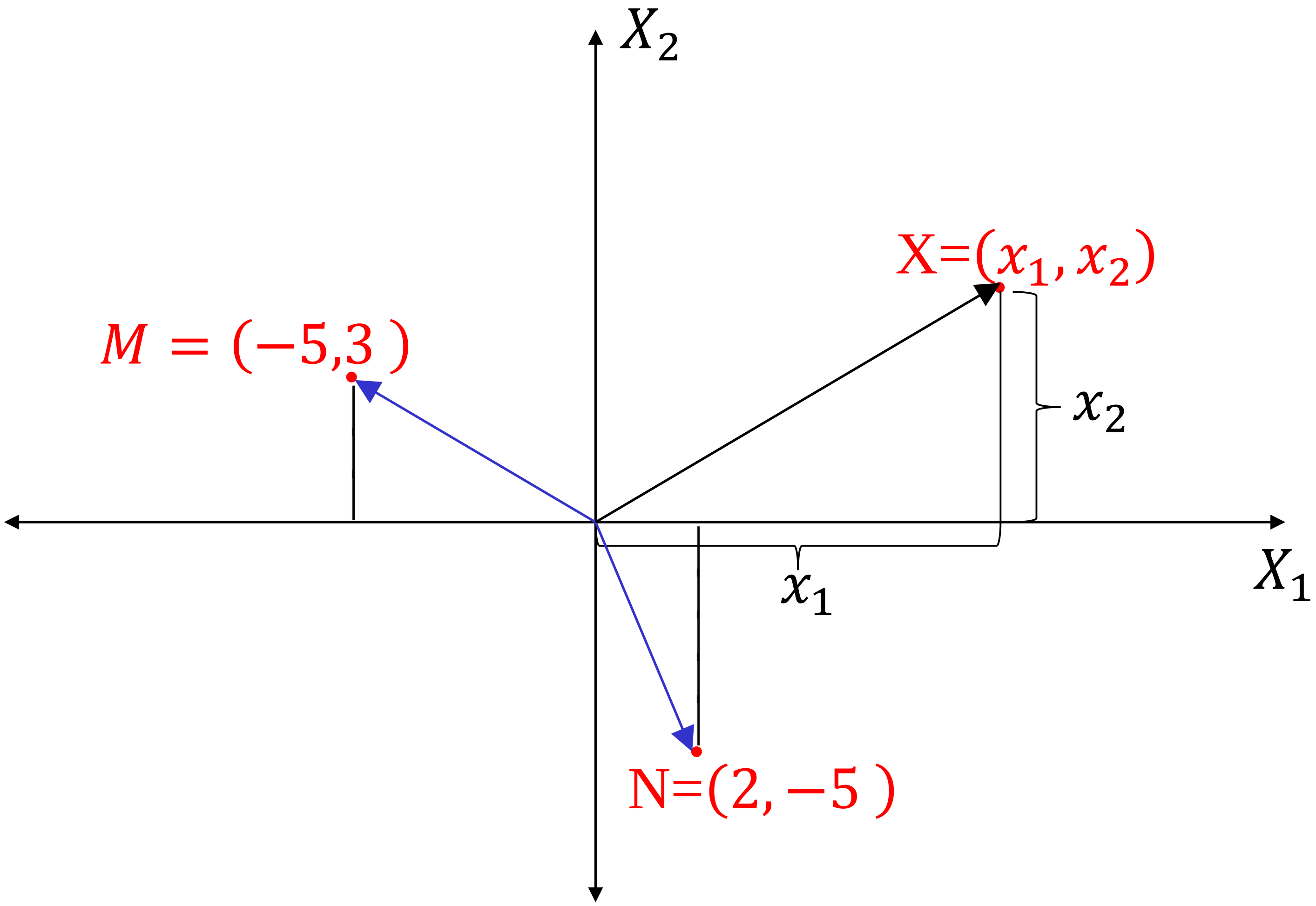
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Ao se interpretar as duplas como deslocamentos tem sentido graficar com uma seta (vide desenho), pois um deslocamento tem sentido (positivo ou negativo) e teria ponto de partida e ponto final.

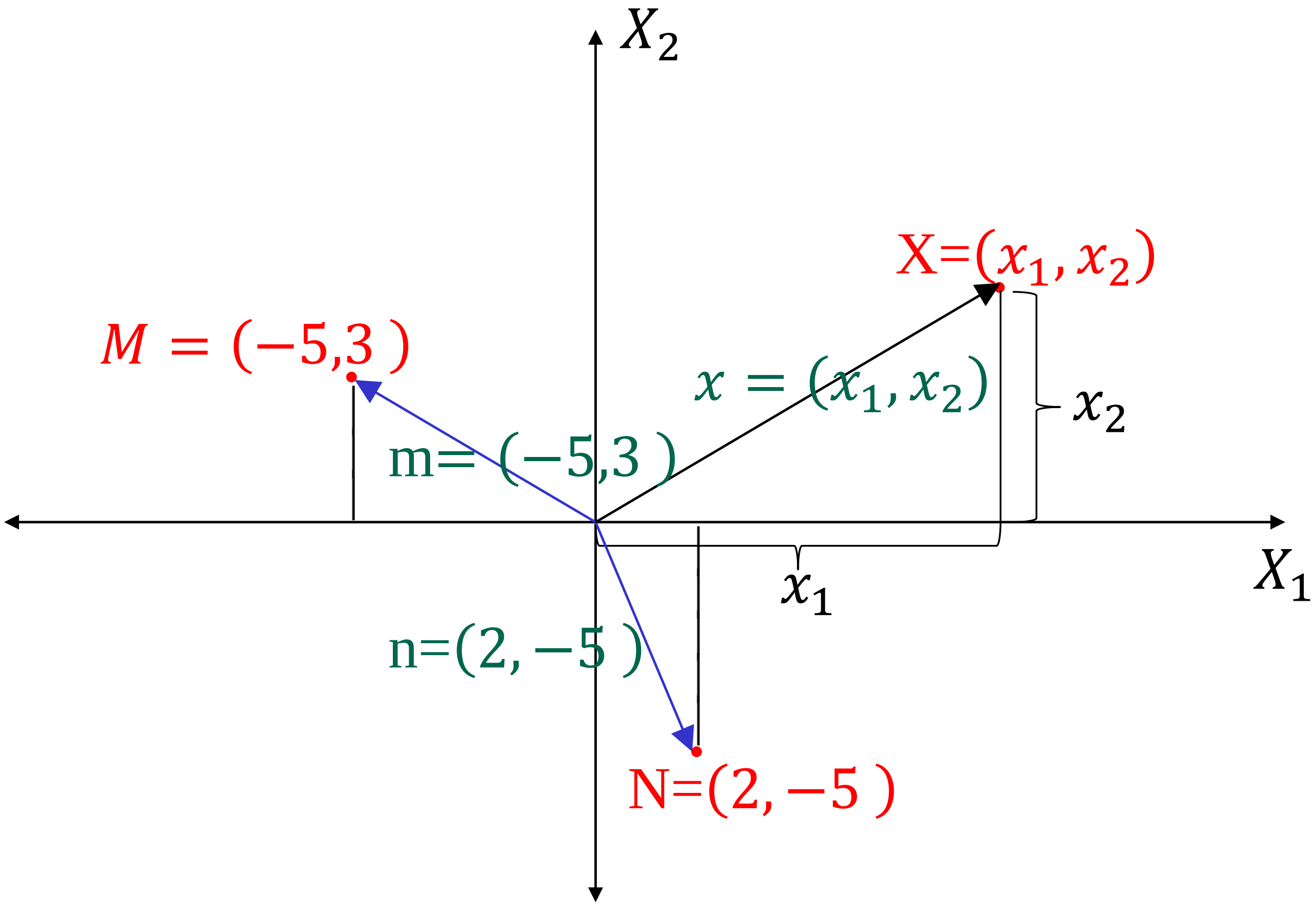
Por exemplo, $(-5,3)$ é um deslocamento desde a origem na orientação do eixo X_1 no sentido negativo (à esquerda) e um segundo deslocamento desde a posição alcançada na orientação do eixo X_2 no sentido positivo (para cima).

Identicamente para a dupla $(2,-5)$.

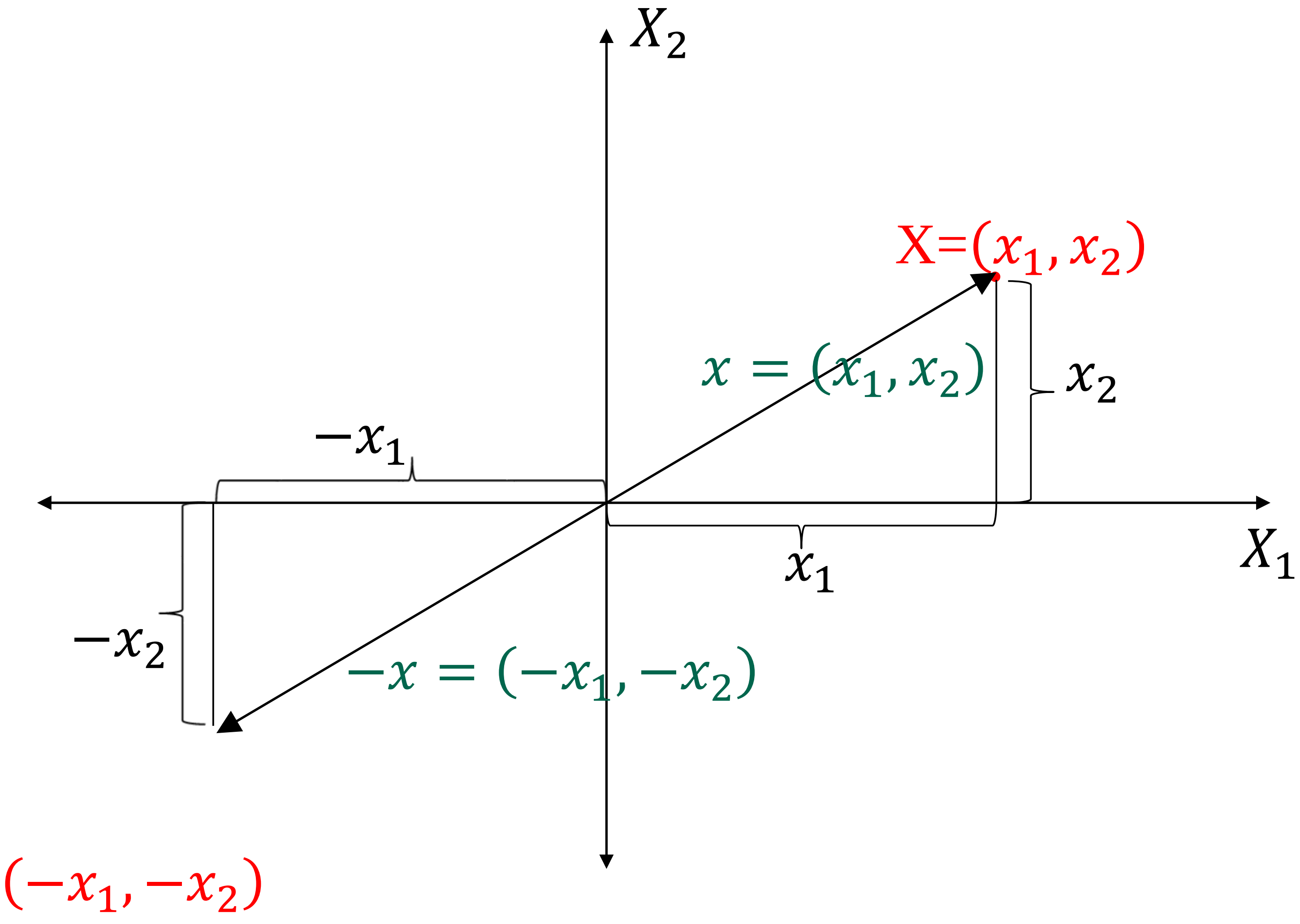
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Considerando deslocamentos a soma:

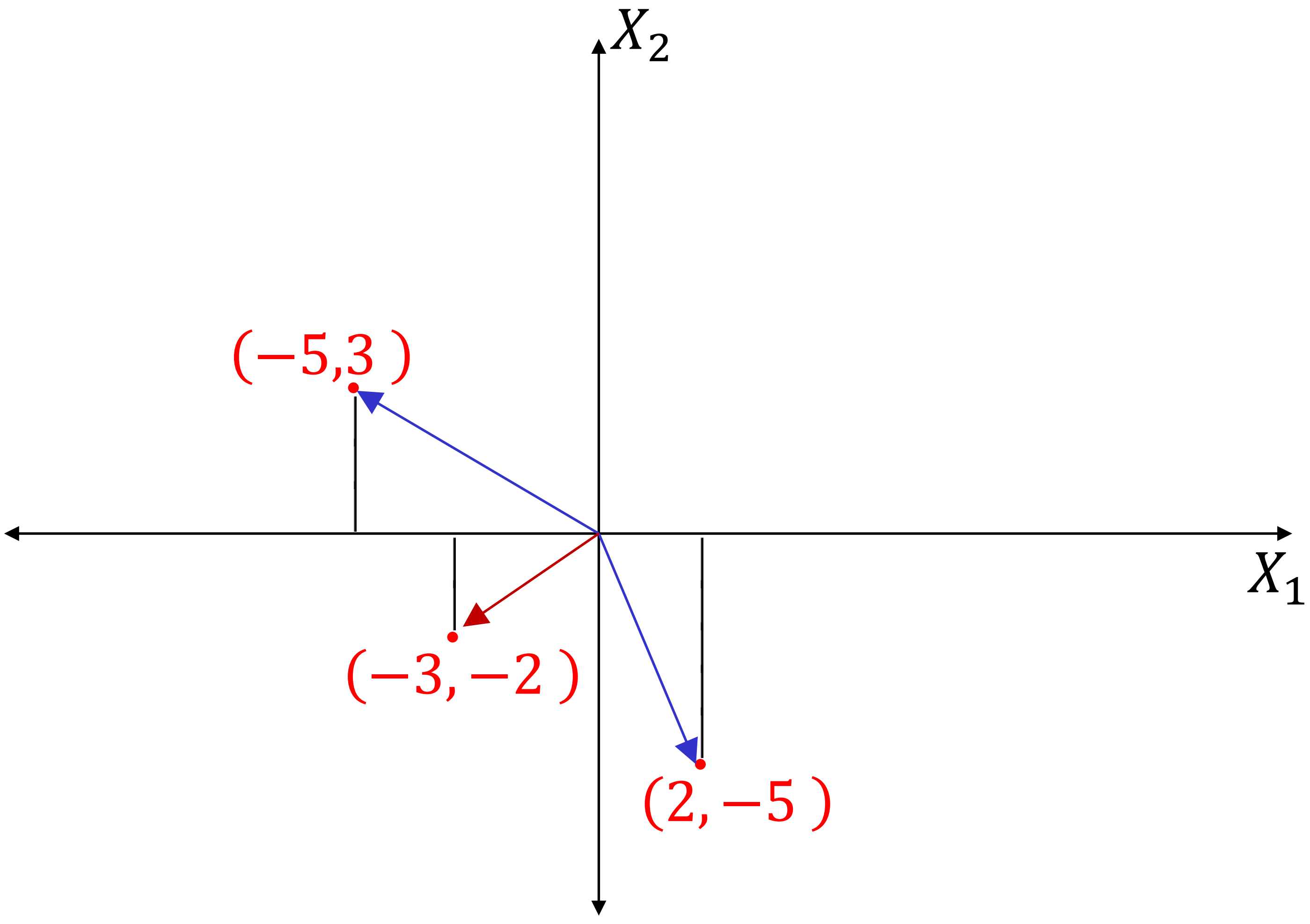
$$(-5,3) + (2,-5) = (-3,-2)$$

seria interpretada como um deslocamento horizontal total $(-5 + 2 = -3)$ e um deslocamento vertical total $(3 + (-5) = -2)$.

Assim, o resultado é o deslocamento horizontal -3 e o deslocamento vertical -2.

Observar os três deslocamentos graficamente:

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

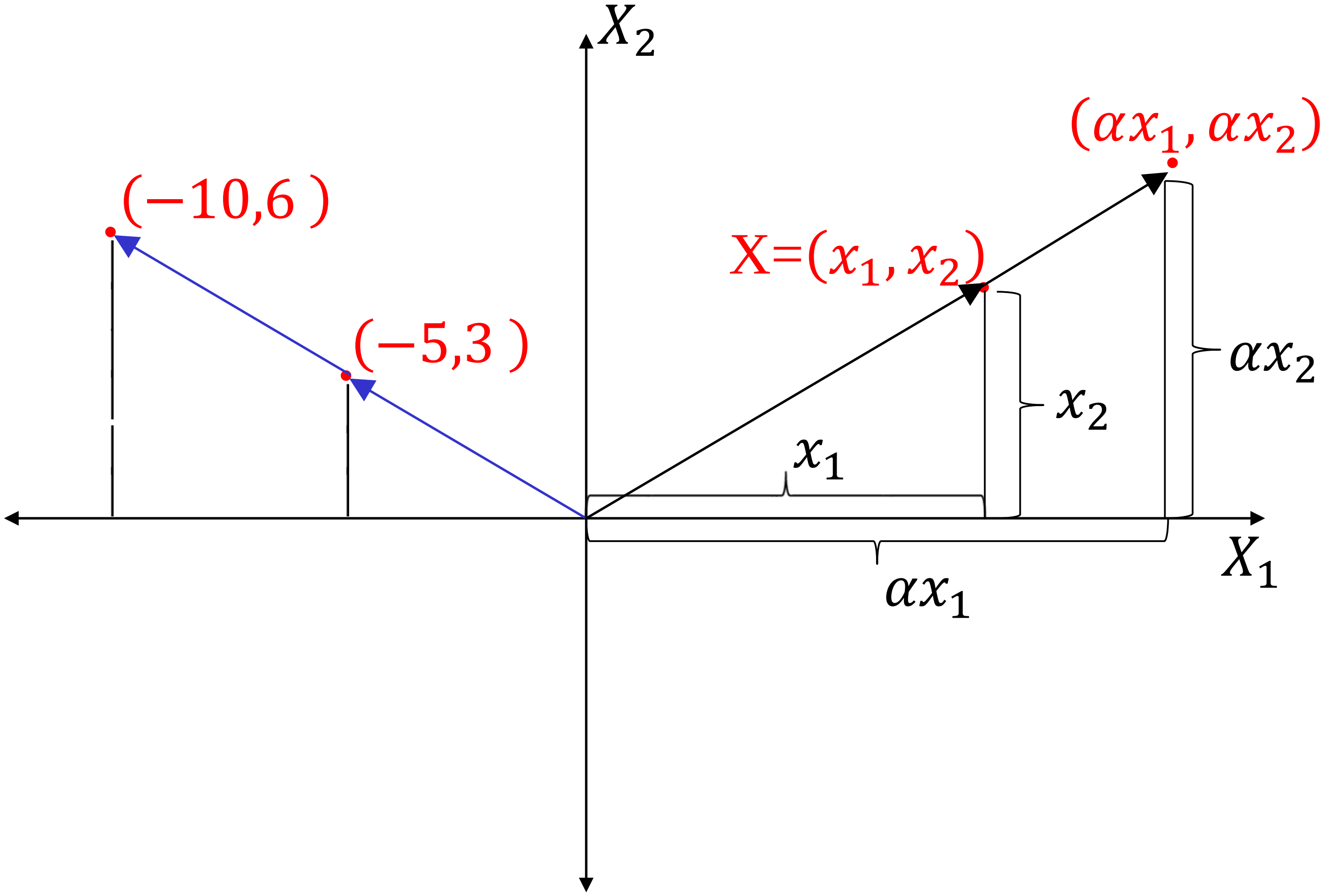
Considerando deslocamentos a multiplicação vezes escalar:

$$2(-5,3) = (-10,6)$$

seria interpretada como um deslocamento horizontal multiplicado vezes o escalar $2(-5) = -10$ e um deslocamento vertical multiplicado vezes o escalar $2(3) = 6$.

Assim, o resultado é

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



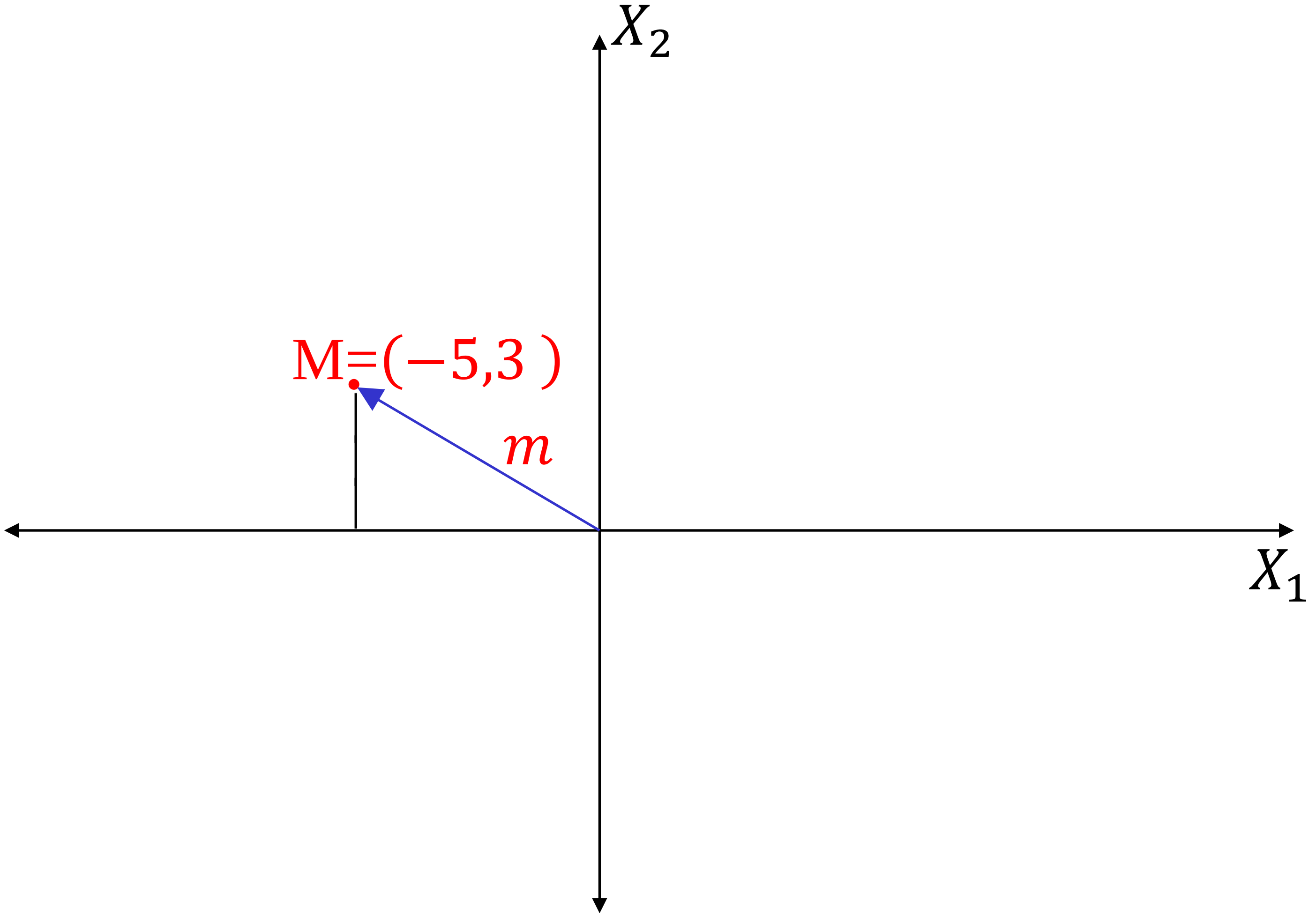
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Se considerarmos as duplas como deslocamentos, observar que não precisamos considerar sempre à origem como ponto de partida.

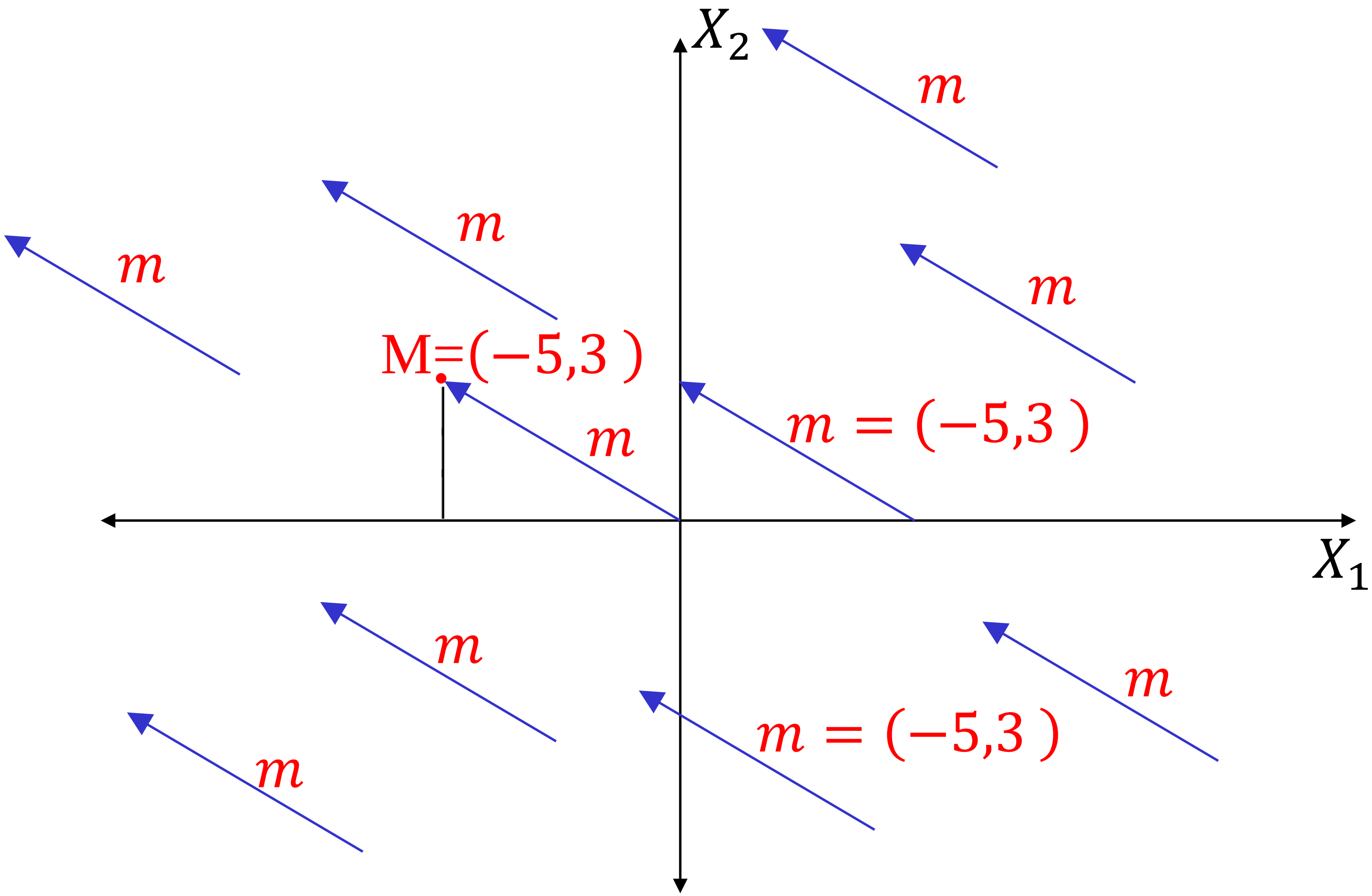
Portanto, uma dupla será considerado como um primeiro deslocamento na orientação do eixo X_1 e um segundo deslocamento na orientação do eixo X_2 (com o sentido adequado), desde qualquer posição.

Exemplo $(-5,3)$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Observe que a representação gráfica agora não é fixa e para cada dupla temos infinitas representações (esse conjunto de representações para cada dupla é chamada de **uma classe de equivalência** de essa dupla).

Exemplo:

O conjunto de todas as representações do vetor

$$m = (-5,3)$$

formam a classe de equivalência de m.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Nesse sentido podemos ver que agora a soma de duplas é melhor entendida.

Somar duas duplas seria:

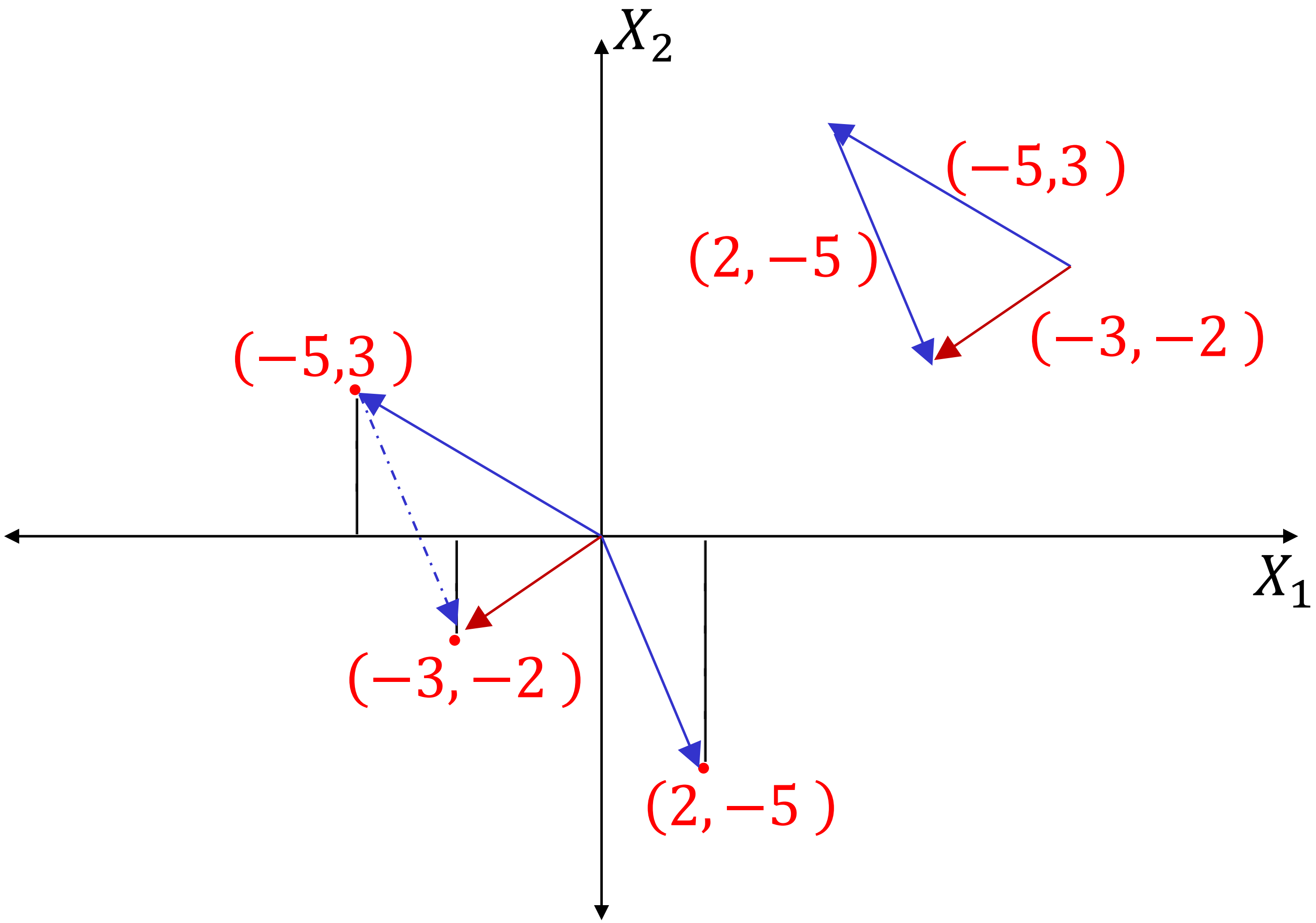
Realizar a primeira dupla, desde uma posição inicial

Realizar a segunda dupla, desde a última posição atingida pela primeira dupla, até uma posição final.

Assim, a soma de duplas é o deslocamento desde a posição inicial até a posição final atingida.

Isso é natural, soma de deslocamentos dá um deslocamento final global (apenas um).

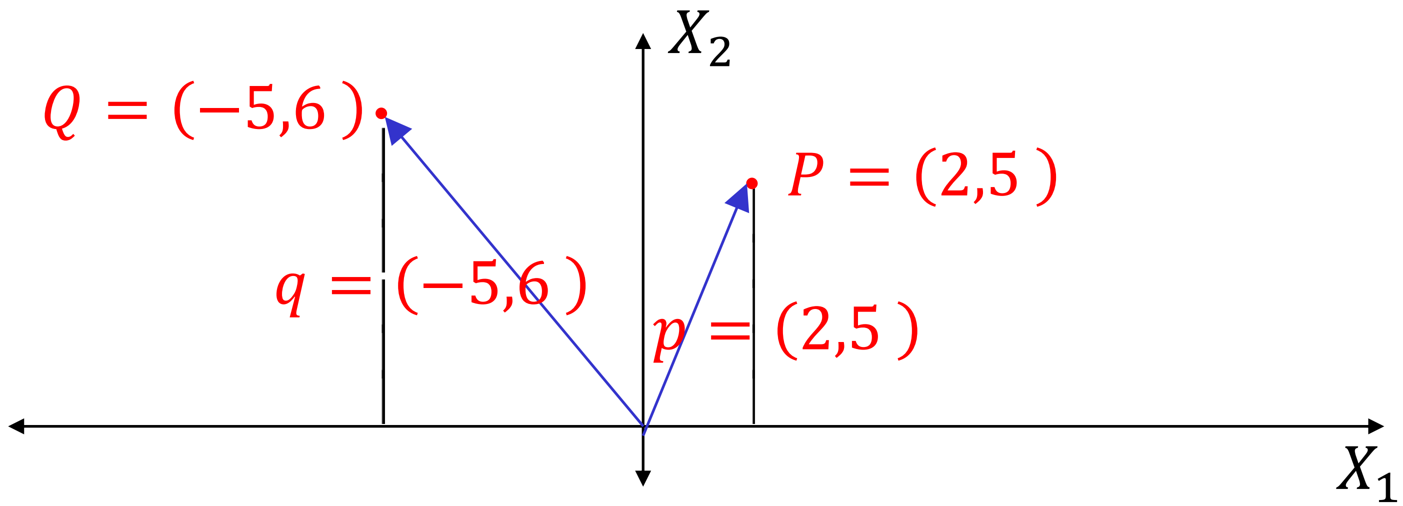
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Por outro lado, se considerarmos dois pontos, sabemos que temos dois vetores associados partindo da origem

Exemplo: Os pontos $P = (2,5)$ e $Q = (-5,6)$.



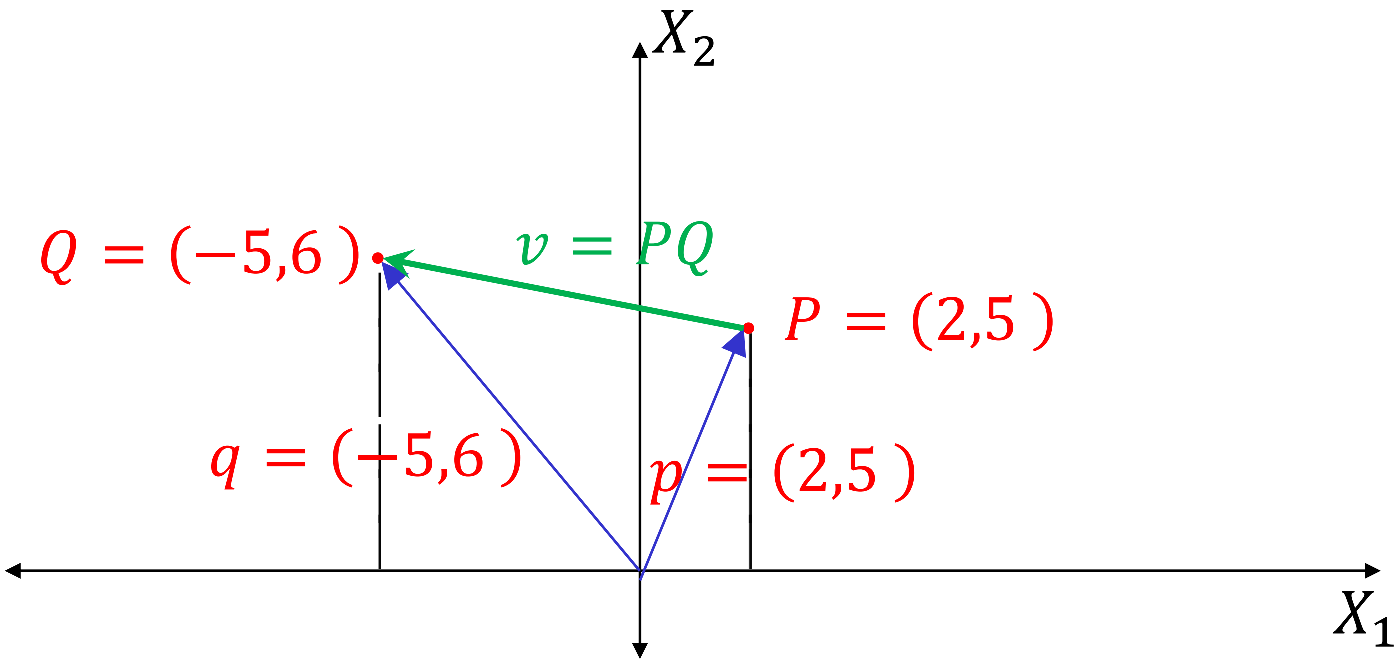
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Se unirmos os dois pontos, geramos um vetor que denotaremos por v. Deve ser definido um sentido, isto é, partir de P ou partir de Q.

Se partirmos de P, o vetor definido chamaremos de $v = PQ$, se partirmos de Q chamaremos o vetor de $w = QP$.

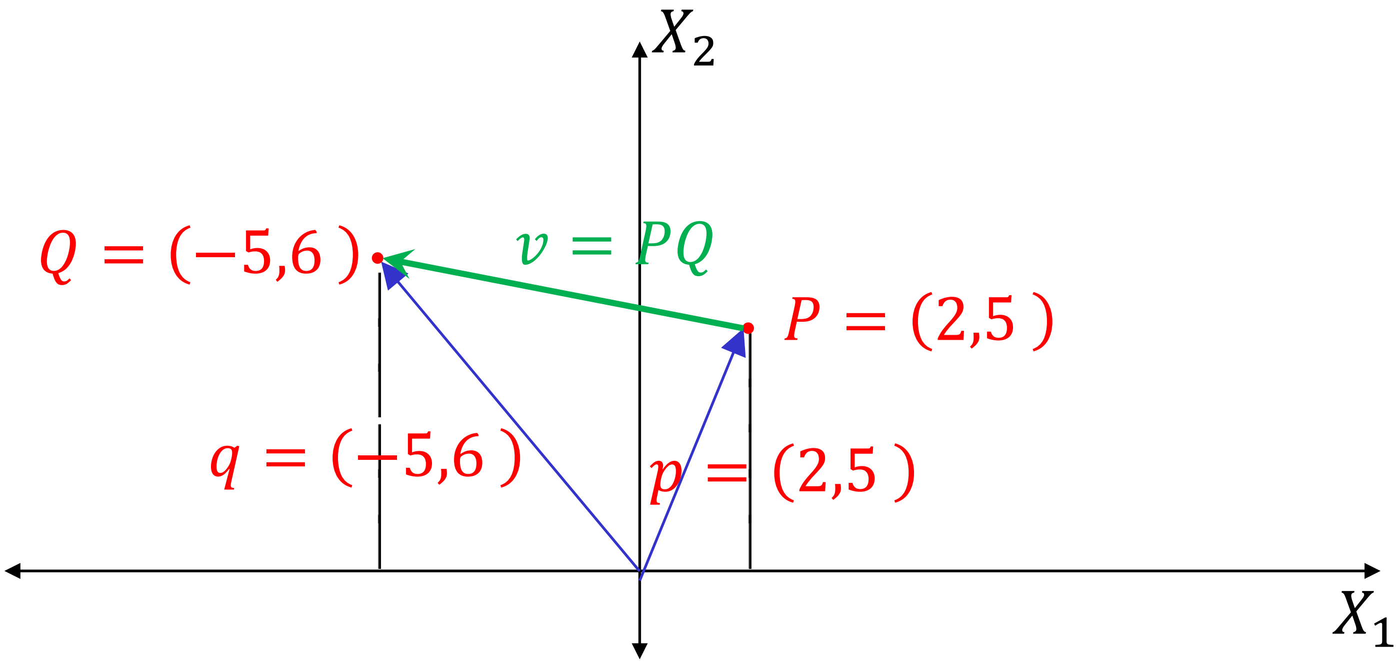
Exemplo: Partindo de P.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



Pela soma de vetores: $p + v = q$, isto é $v = q - p$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$



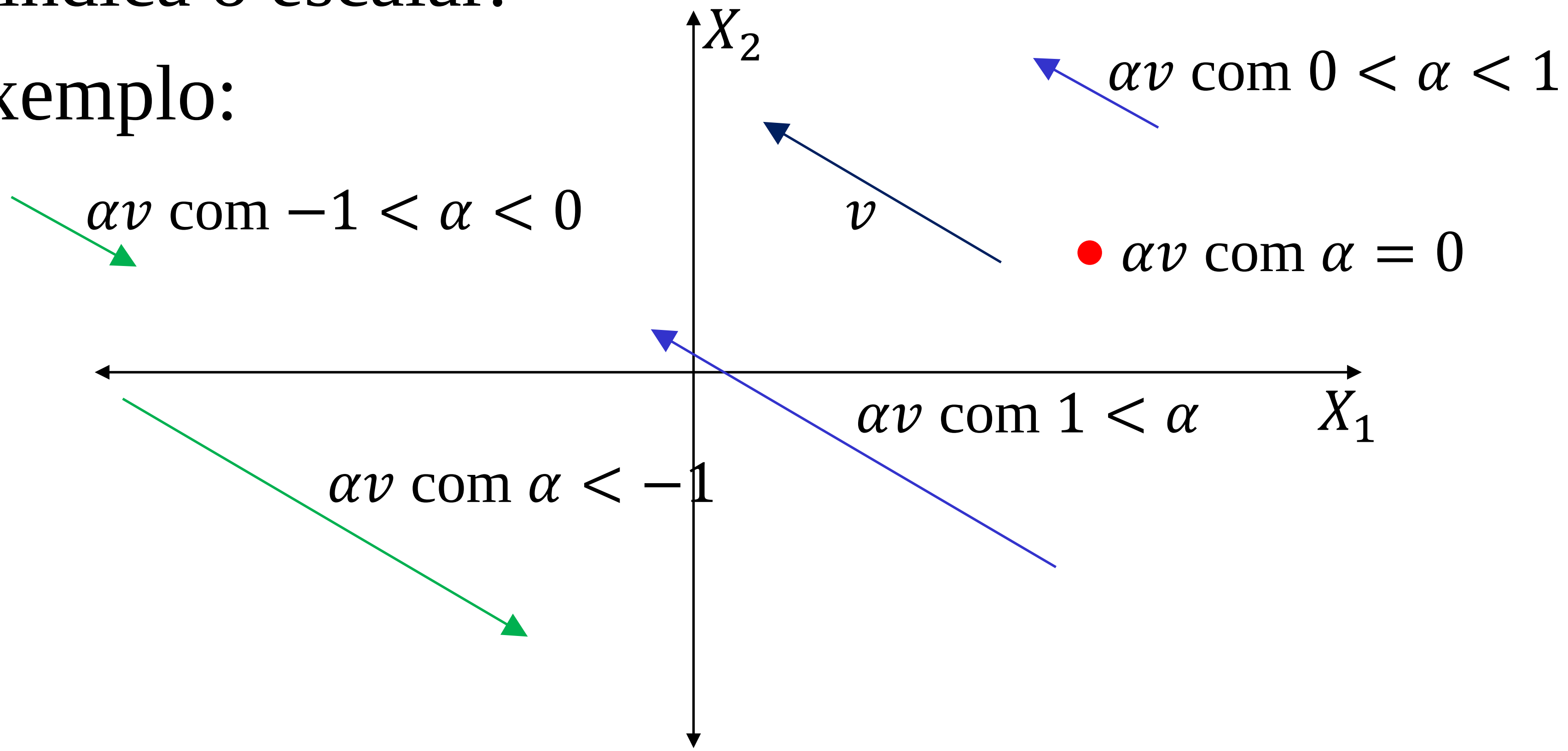
Pela soma de vetores: $p + v = q$, isto é $v = q - p$.

Assim, é común escrever $v = PQ = q - p = Q - P$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

A multiplicação de um escalar α vezes um vetor v é realizar o deslocamento total tantas vezes quanto indica o escalar.

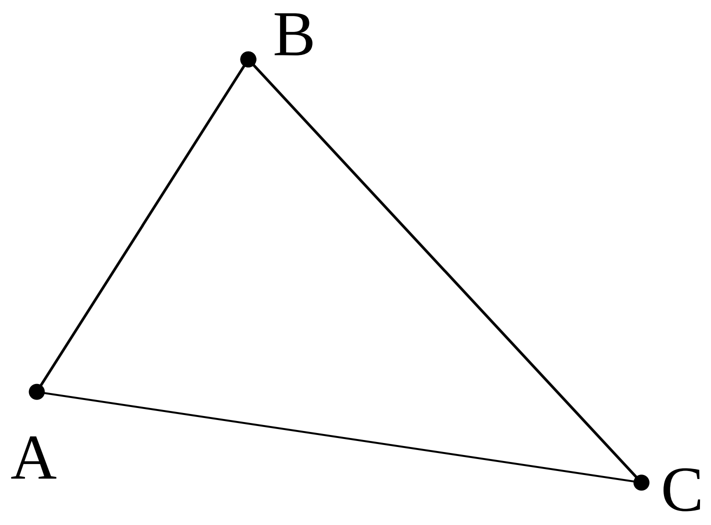
Exemplo:

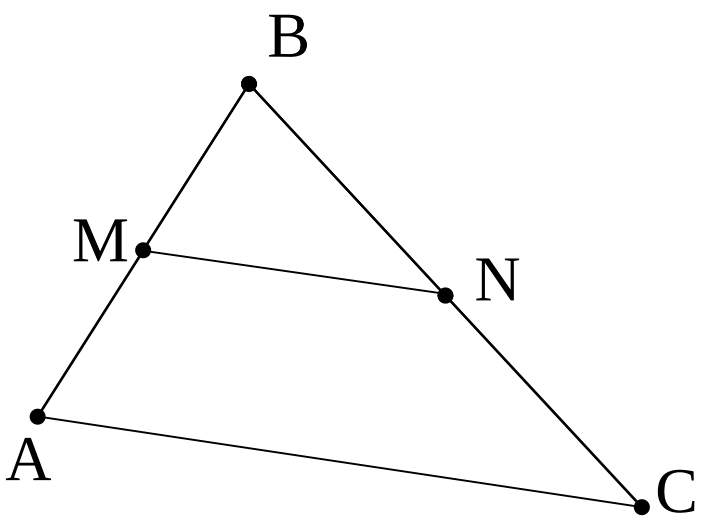


Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Observar: podemos trabalhar de forma mais fácil alguns resultados da geometria

"Em um triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é metade do terceiro lado"



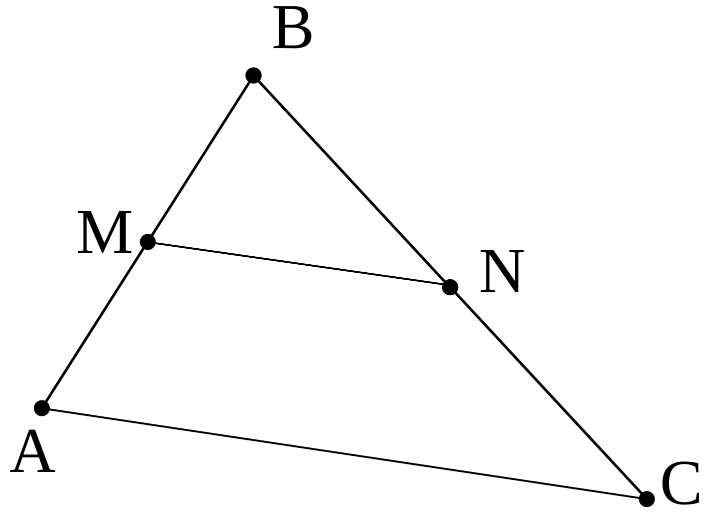


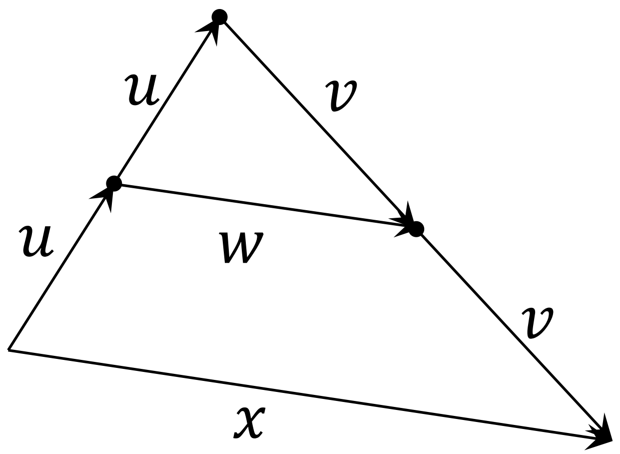
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Agora vejamos o triângulo, considerando vetores.

Considerando o segmento AM como um vetor u (dando orientação), teriamos que o segmento MB é o mesmo vetor, pois M é ponto médio.

Assim, podemos escrever:





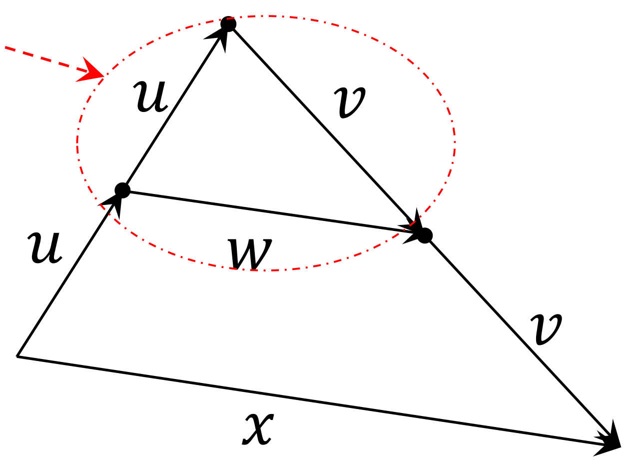
Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Pela soma de vetores

$$w = u + v$$

Também

$$x = u + u + v + v$$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Pela soma de vetores

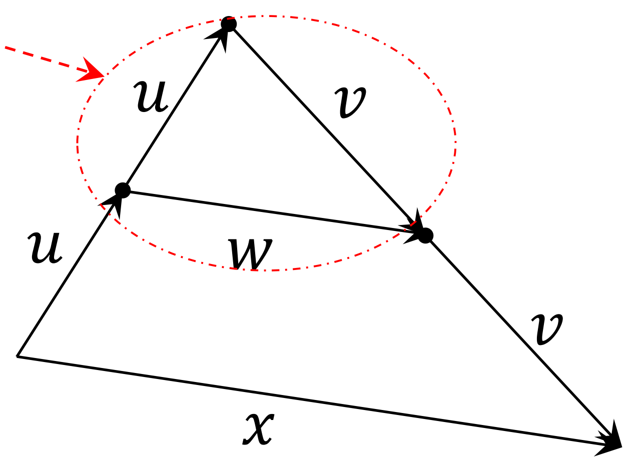
$$w = u + v$$

Também

$$x = u + u + v + v$$

E pelas propriedades

$$x = 2u + 2v$$
$$x = 2(u + v)$$
$$x = 2w$$



O terceiro lado é o dobro do vetor que une os pontos médios.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mathbin{/} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

A interpretação geométrica é similar ao realizado para $\mathbb{R}^2$.

Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \;/\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

e multiplicação vezes escalar:

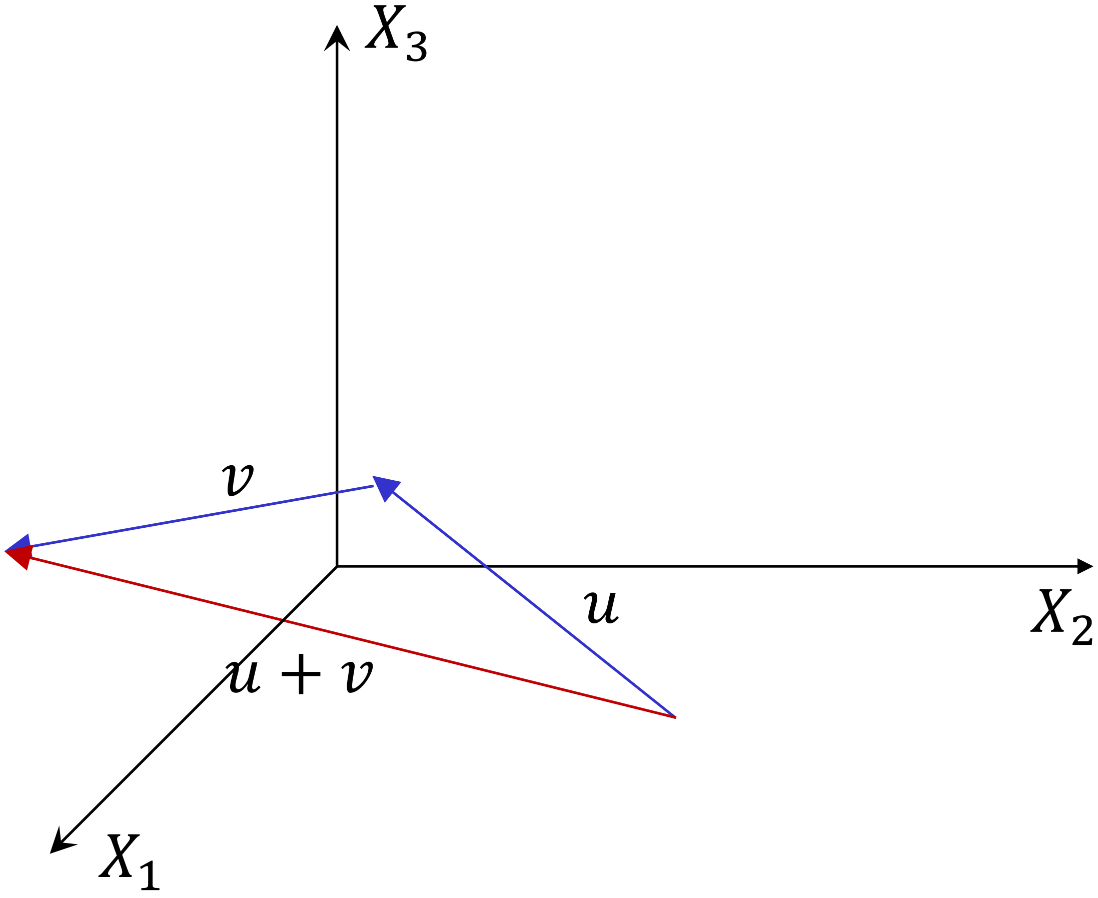
$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

A base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

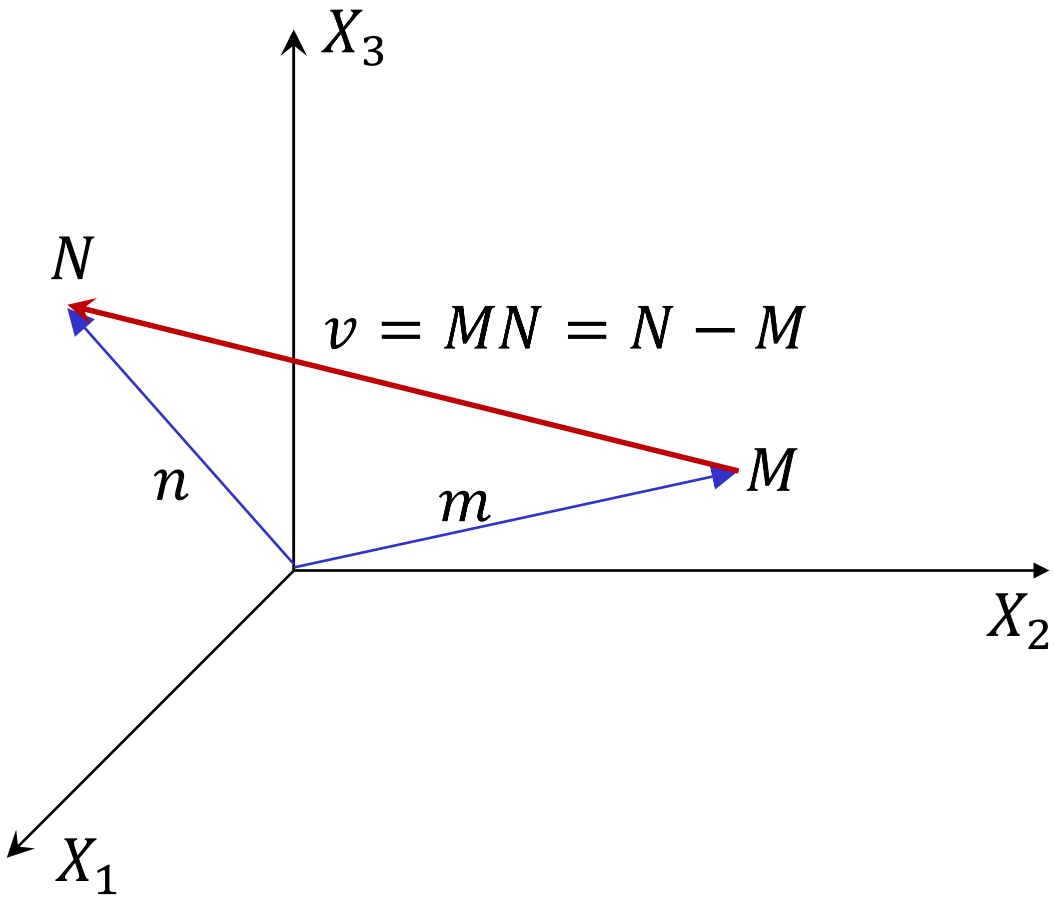
$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Adição

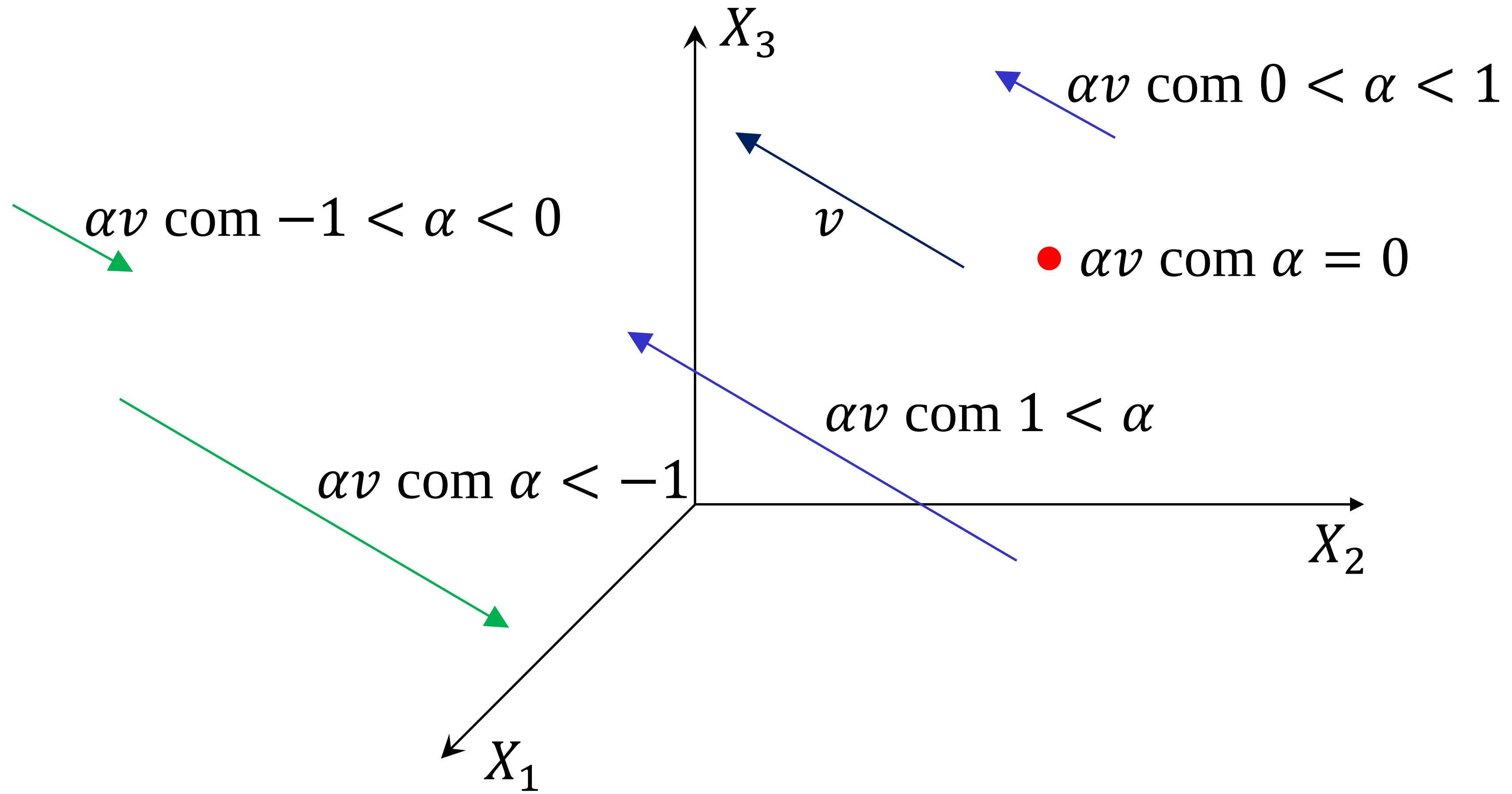


Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$



Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Multiplicação vezes escalar



O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

- É possível definir de forma útil outras operações nos espaços $\mathbb{R}^n$?
- Será que existe uma operação como a multiplicação de matrizes?, isto é, multiplicar dois vetores de $\mathbb{R}^n$ e que o resultado seja outro vetor?
- A resposta é SIM para $\mathbb{R}^3$ (produto vetorial). Para $\mathbb{R}^n$ não foi encontrado nenhuma operação útil.
- Para $\mathbb{R}^n$, incrementamos mais uma operação “produto escalar” e vamos obter muitos resultados importantes com a definição dessa nova operação.