Espaço Vetorial

ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”

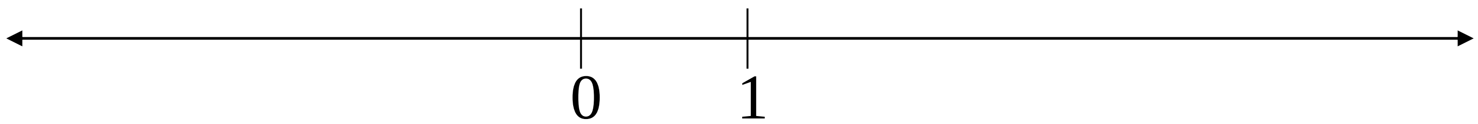
Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

16 de abril de 2020

Os números reais com estrutura

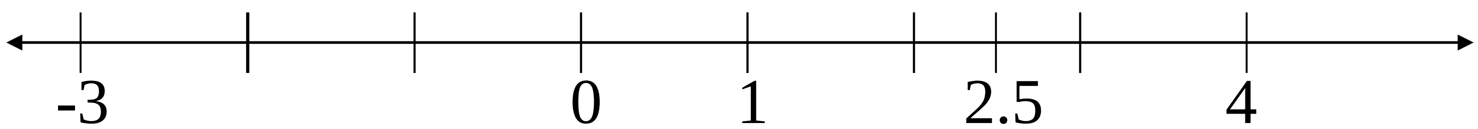
O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, possui dois elementos diferenciados, a origem e a unidade.



Alguns conjuntos com estrutura

O conjunto dos números reais ℝ, possui dois elementos diferenciados, a origem e a unidade.

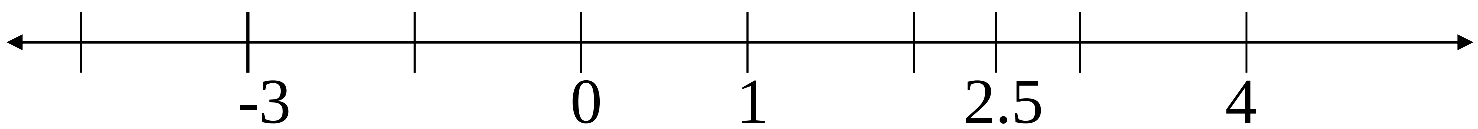
Determinando esses elementos, o conjunto pode ser representado geométricamente:



Alguns conjuntos com estrutura

O conjunto dos números reais ℝ, possui dois elementos diferenciados, a origem e a unidade.

Determinando esses elementos, o conjunto pode ser representado geométricamente:



O conjunto ℝ, não é apenas um conjunto, ele tem uma estrutura, munido por exemplo de uma relação de ordem “menor que”.

Operações no conjunto ℝ

Podemos também operar seus elementos:

Adição (+), que satisfaz as propriedades de clausura, conmutatividade, associatividade, existência de um elemento neutro e existência de elementos inversos aditivos.

Multiplicação (·), que satisfaz as propriedades de clausura, conmutatividade, associatividade, existência de um elemento neutro e existência de elementos inversos para os elementos não nulos.

Propriedades de distributividade valem quando temos adição e multiplicação juntos.

Estrutura algébrica

Juntando o conjunto dos números reais e suas operações criamos uma estrutura algébrica, e nela as propriedades mencionadas são satisfeitas:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

é uma estrutura algébrica. Essa estrutura algébrica é chamada de “corpo”.

Estrutura algébrica

Juntando o conjunto dos números reais e suas operações criamos uma estrutura algébrica, e nela muitas propriedades são satisfeitas:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

é uma estrutura algébrica. Essa estrutura algébrica é chamada de “corpo”.

Não desenvolveremos a ideia de “corpo”, pois estamos interessados em uma estrutura algébrica menos restritiva que vale para os conjuntos que já utilizamos (como os conjuntos de matrizes) e outros que estudaremos posteriormente.

Conjuntos de matrizes e operações

Lembremos do conjunto de matrizes de ordem 2×2

$$M_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \,/\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 2\pi & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 4 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^2 & -1 \\ 4.3 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Conjuntos de matrizes e operações

Adição:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicação vezes escalar: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Estrutura algébrica

Observamos que temos três operações com os elementos das matrizes de $M_{2\times2}$.

Vamos juntar o conjunto de matrizes com as duas primeiras operações mencionadas ("adição" e "multiplicação vezes escalar") para formar uma estrutura

$$(M_{2\times2}, \oplus, \otimes)$$

Observar: Hemos formado uma terna com um conjunto não vazio, uma operação "adição" e uma outra operação "multiplicação vezes escalar".

Espaço vetorial - Definição

Um conjunto não vazio E, no qual estão definidas duas operações $\oplus$ e $\otimes$, **é um espaço vetorial** se as seguintes propriedades são satisfeitas:

A1: Se $u \in E, v \in E \Rightarrow u \oplus v \in E$

A2: $\forall u, v \in E \Rightarrow u \oplus v = v \oplus u$

A3: $\forall u, v, w \in E \Rightarrow u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

A4: Existe $0 \in E$ tal que $v \oplus 0 = v, \forall v \in E$

A5: A cada $v \in E$, existe $(-v) \in E$ tal que

$$v \oplus (-v) = 0$$

e

Espaço vetorial – Definição (cont)

M1: Dado um $\alpha \in K$, e dado $x \in E$ então $\alpha \otimes x \in E$

M2: $(\alpha\beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$; $\forall \alpha, \beta \in K$; $\forall x \in E$

M3: $1 \otimes x = x$; $\forall x \in E$

M4:

$\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$; $\forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$

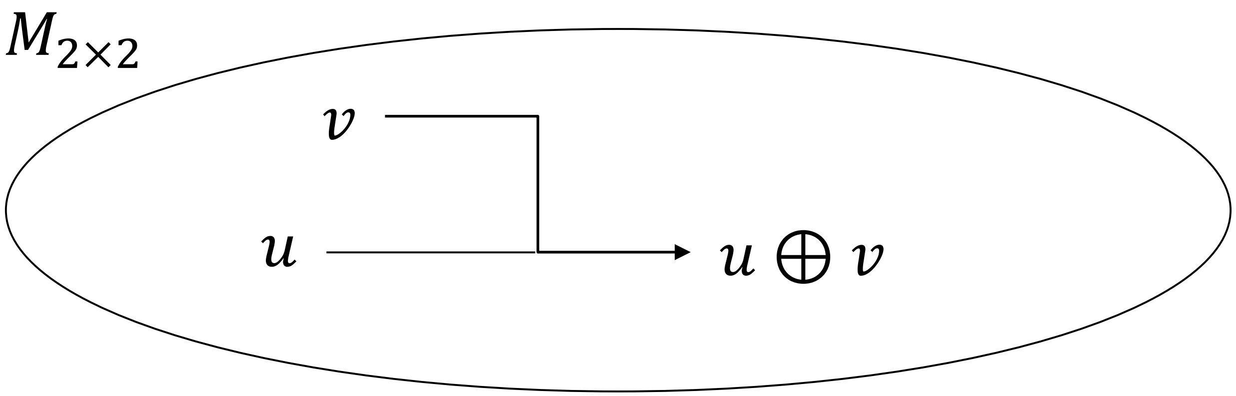
M5:

$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$

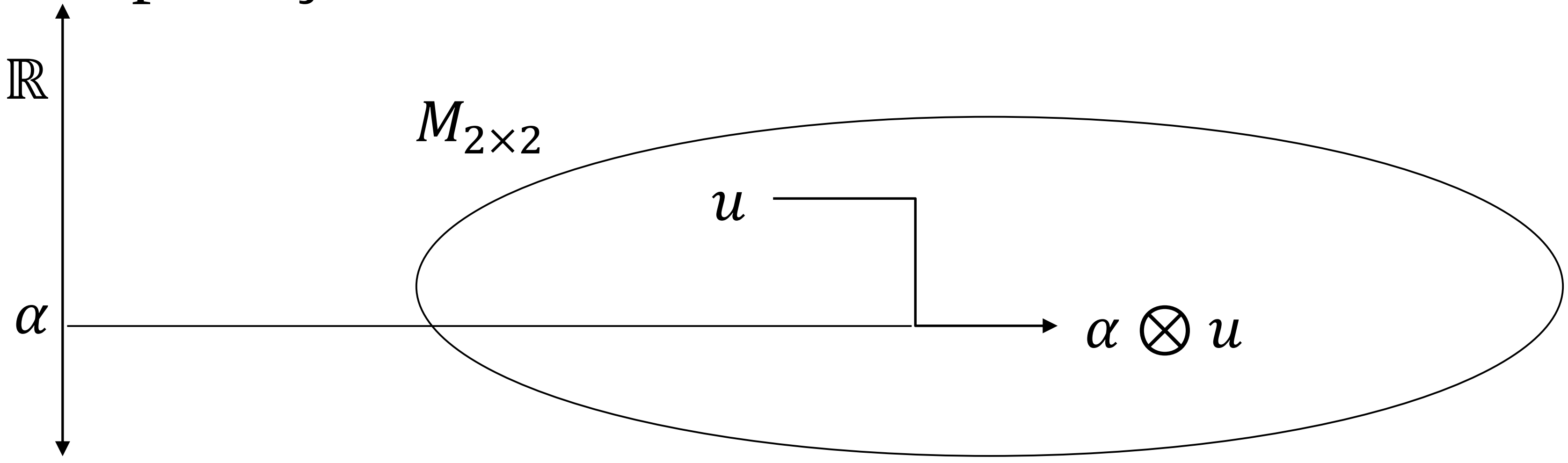
A terna $(E, \oplus, \otimes)$ é um espaço vetorial se são satisfeitas as propriedades de A1 até A5 e de M1 até M5.

Observações sobre as operações

Adição:



Multiplicação vezes escalar:



Vetores

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de **vetores**.

Isto é, são elementos (não necessariamente números) que podem ser adicionados e multiplicados vezes escalares e satisfazem as propriedades enumeradas

Observar: As operações de adição e multiplicação vezes escalar não são únicas, podem ser definidas pelo usuário (segundo as suas necessidades).

Um exemplo

Já conhecemos o conjunto de matrizes $M_{2\times 1}$ com operações já definidas. Isto é:

O conjunto de matrizes coluna, com duas linhas,

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a adição (soma usual)

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar (usual)

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Um exemplo, é um **espaço vetorial?**.

Vou definir **outra operação** no mesmo conjunto:

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma usual

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar como

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Não é espaço vetorial? – um exemplo.

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

adição: $x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$

Observar: A soma de matrizes $\oplus$ não é igual a soma de reais $+$.

Não é espaço vetorial? – um exemplo.

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma $x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$

e com a multiplicação vezes escalar como:

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Observar: A multiplicação de um escalar com uma matriz $\odot$ não é igual a multiplicação de reais.

Observar: Que a primeira linha não é multiplicada.

Um exemplo, é um **espaço vetorial?**.

Seja o conjunto de matrizes coluna, com duas filas,

$$M_{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} / a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

com a soma usual

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix}$$

e com a multiplicação vezes escalar como

$$\alpha \odot x = \alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}$$

Pergunta:

A terna $(M_{2\times 1}, \oplus, \odot)$ **é um espaço vetorial?**

Um exemplo, é um **espaço vetorial?**.

Realmente satisfaz as propriedades:

A1, A2, A3, A4, A5, M1, M2 e M3.

Vamos desenvolver a verificação para as propriedades M4 e M5, para apresentar o processo de verificação.

Verificando distributividade → M4

M4:
$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y);\ \forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$

Nota: a igualdade deve ser **comprovada**, não é **dada**.

Assim, devemos calcular cada lado por separado e ver se é possível chegar na mesma expressão:

1. $\alpha \odot (x \oplus y) = \ ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = ?$

Verificando distributividade → M4

M4:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y);\ \forall \alpha \in K; \forall x, y \in E$$

1. Trabalhando no lado esquerdo

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ pois } x, y \in E$$

$$= \alpha \odot \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ x_{21} + y_{21} \end{bmatrix} \right) \text{ usando a adição definida}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha(x_{21} + y_{21}) \end{bmatrix} \right) \text{usando a multiplicação}$$

vezes escalar definida.

Verificando distributividade → M4

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y) = \left(\alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\alpha \odot \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix}\right)$$

$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\begin{bmatrix} y_{11} \\ \alpha y_{21} \end{bmatrix}\right)$ utilizando a definição da multiplicação vezes escalar

$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha x_{21} + \alpha y_{21} \end{bmatrix}\right)$ usando definição da adição

$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} \\ \alpha (x_{21} + y_{21}) \end{bmatrix}\right)$ associatividade de números reais.

Verificando distributividade → M4

Observamos que se obteve o mesmo resultado partindo de cada um dos lados. Assim

$$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$$

para todo escalar $\alpha \in K$,

e para quaisquer elementos $x, y \in E$.

Portanto, a propriedade M4 se satisfaz.

Verificando distributividade → M5

M5:

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada**, não é **dada**.

Calculemos:

1. $(\alpha + \beta) \odot x = ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = ?$

Verificando distributividade → M5

1. Trabalhando no lado esquerdo

$(\alpha+\beta)\odot x = (\alpha+\beta)\odot\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$ pois $x \in E$

$= \begin{bmatrix} x_{11} \\ (\alpha+\beta)x_{21} \end{bmatrix}$ usando a multiplicação vezes escalar definida

$= \begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix}$ usando a distributividade da soma e multiplicação entre números reais.

Verificando distributividade → M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = \left(\alpha \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\beta \odot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \alpha x_{21} \end{bmatrix}\right) \oplus \left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \beta x_{21} \end{bmatrix}\right)$$ usando a definição da multiplicação vezes escalar em ambos somandos

$$= \left(\begin{bmatrix} x_{11} + x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix}\right)$$ usando definição da adição

$$= \left(\begin{bmatrix} 2x_{11} \\ \alpha x_{21} + \beta x_{21} \end{bmatrix}\right)$$ adição de números reais.

Verificando distributividade → M5

Observamos que se obteve diferentes resultados para cada um dos lados. Assim

$$(\alpha + \beta)\odot x \neq (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

para todo escalar $\alpha, \beta \in K$,

e para qualquer elemento $x \in E$.

Portanto, a propriedade M5 não se satisfaz.

Basta uma propriedade não ser válida, então

a terna $(M_{2\times 1}, \oplus, \odot)$ **não é espaço vetorial.**

Principais Exemplos

1. O conjunto de polinômios de grau n

$$P_n = \{ p(t) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \ldots + p_1 t + p_0 \, / \, p_i \in R \}$$

Adição: Sejam $p, q \in P_n$

$$\Rightarrow p \oplus q = (p_n + q_n) t^n + \ldots + (p_1 + q_1) t + (p_0 + q_0)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in R, p \in P_n$

$$\Rightarrow \alpha \otimes p = (\alpha p_n) t^n + \ldots + (\alpha p_1) t + (\alpha p_0)$$

Assim os polinômios são **vetores**.

Os polinômios são vetores

Apenas verificamos a propriedade M5.

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada**!!!

1. $(\alpha + \beta) \odot x = ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = ?$

Os polinômios são vetores

Apenas verificamos a propriedade M5.

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

A propriedade para o conjunto de polinômios será

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in P_n$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada**!!!

1. $(\alpha + \beta) \odot x = ?$
2. $(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = ?$

Os polinômios são vetores

Apenas verificamos a propriedade M5.

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in E$$

A propriedade para o conjunto de polinômios será

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x); \forall \alpha, \beta \in K; \forall x \in P_n$$

Mas como $x \in P_n$ então

$$x = x(t) = x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0$$

Lembro: a igualdade deve ser **verificada**!!!

1. $(\alpha + \beta) \odot x = ?$

2. $(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = ?$

Verificando distributividade → M5

1. Trabalhando no lado esquerdo

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha + \beta) \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0)$$

$$= (\alpha + \beta) x_n t^n + (\alpha + \beta) x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + (\alpha + \beta) x_0$$

utilizando a multiplicação vezes escalar.

Observar: Na última expressão todas são operações entre números reais.

Verificando distributividade → M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = (\alpha \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0)) \\ \oplus (\beta \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0))$$

Aqui, só temos substituido o elemento x (que é um polinômio)

Verificando distributividade → M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = (\alpha \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0)) \\ \oplus (\beta \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0))$$

$$= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha x_0) \\ \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta x_0)$$

utilizando a definição da multiplicação vezes escalar em ambos somandos

Verificando distributividade → M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = (\alpha \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0)) \oplus (\beta \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0))$$

$$= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha x_0) \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta x_0)$$

$$= (\alpha x_n + \beta x_n) t^n + (\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}) t^{n-1} + \cdots + (\alpha x_0 + \beta x_0)$$

utilizando a definição de adição

Verificando distributividade → M5

2. Trabalhando no lado direito

$$(\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x) = (\alpha \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0)) \oplus (\beta \odot (x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + x_0))$$

$$= (\alpha x_n t^n + \alpha x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha x_0) \oplus (\beta x_n t^n + \beta x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta x_0)$$

$$= (\alpha x_n + \beta x_n) t^n + (\alpha x_{n-1} + \beta x_{n-1}) t^{n-1} + \cdots + (\alpha x_0 + \beta x_0)$$

$$= (\alpha + \beta) x_n t^n + (\alpha + \beta) x_{n-1} t^{n-1} + \cdots + (\alpha + \beta) x_0$$

propriedade de distributividade dos número reais.

Verificando distributividade → M5

Observamos que se obteve os mesmos resultados trabalhando em cada lado. Assim

$$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$$

para todo escalar $\alpha, \beta \in K$,

e para qualquer elemento $x \in P_n$.

Portanto, a propriedade M5 é satisfeita.

O aluno é convidado a verificar as propriedades de A1 até A5 e de M1 até M4.

Verificará que $(P_n, \oplus, \odot)$ **é espaço vetorial.**

Principais Exemplos

2. O conjunto de n-uplas

$$K^n = \{(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) / a_i \in K\}$$

Nota: $K = \mathbb{R}$ (Reais) ou $K = \mathbb{C}$ (Complexos).

Adição: Sejam $h, k \in K^n$

$$\Rightarrow h \oplus k = (h_1 + k_1, h_2 + k_2, ..., h_{n-1} + k_{n-1}, h_n + k_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam $\alpha \in R, k \in K^n$

$$\Rightarrow \alpha \otimes k = (\alpha k_1, \alpha k_2, ..., \alpha k_{n-1}, \alpha k_n)$$

Assim os n-uplas são **vetores**.

Principais exemplos

3. $M_{m \times n}$ o conjunto de matrizes de m linhas e n colunas, (ordem fixa $m \times n$) com a adição usual:

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_{11} & \ldots & y_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m1} & \ldots & y_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & \ldots & x_{1n} + y_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} + y_{m1} & \ldots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix}$$

Principais exemplos

e com a multiplicação vezes escalar usual:

$$\alpha \otimes x = \alpha \otimes \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \dots & \alpha x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha x_{m1} & \dots & \alpha x_{mn} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial.

Assim as matrizes de uma mesma ordem são **vetores**.