Aula Passada

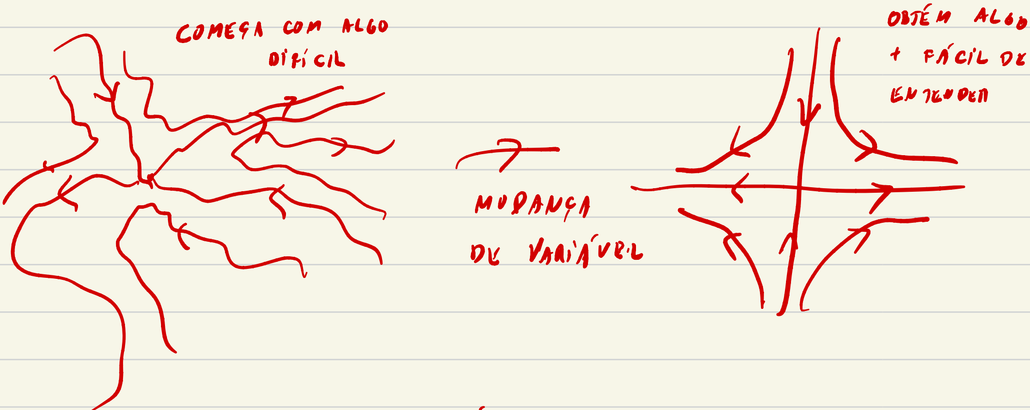
Terminamos fluxo: $\phi(x,t) = y(t)$ em que $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$

Se $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \phi : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

$$\Omega = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times \underbrace{I(x)}$$

↳ intervalo máximo de

Conjugação e Equivalência



Ideia: Mudança de variável

Exemplos

1) $\boxed{y'(t) = -a \operatorname{cotg} y(t)}$ $\qquad \operatorname{cotg}(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Vamos escrever $z(t) = \cos(y(t))$ $\Rightarrow \boxed{z'(t)} = -\operatorname{sen}(y(t))\, y'(t)$

$$= -\operatorname{sen}(y(t))(-a)\frac{\cos(y(t))}{\operatorname{sen}(y(t))}$$

$$= a \cos(y(t)) = \boxed{a\, z(t).}$$

Solução: $z(t) = z_0 e^{at}$

$z = \cos y \Rightarrow y(t) = \arccos(z_0 e^{at})$.

2) $\boxed{y'(t) = Ay(t)}$

Vamos definir $z(t) = Q^{-1}y(t)$, $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Logo $\boxed{z'(t)} = Q^{-1}y'(t) = Q^{-1}Ay(t) = \boxed{Q^{-1}AQz(t)}$

$y' = Ay$ $\qquad$ $z = Q^{-1}y \Leftrightarrow y = Qz$.

Se A for diagonalizável, podemos escolher Q t.q. $Q^{-1}AQ = D$, D diagonal.

Conclusão: $y'(t) = Ay(t)$ se torna $z(t) = Dz(t)$ por uma mudança de variável.

Ilustração

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Q^{-1}AQ = D$.

$z = Q^{-1}y$.

3) $y'(t) = f(y(t))$, $f: E \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

$z = g(y)$.

Aqui $g: E_1 \longrightarrow E_2$, $E_1, E_2 \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$

g é difeomorfismo de classe C^k, $k \geq 1$.

Recordação: $g: E_1 \to E_2$ é difeomorfismo de classe C^k se

1) g é bijeção (injetora + sobrejetora)
2) g e g^{-1} são de classe C^k.

$z(t) = g(y(t))$. Logo

$\hookrightarrow \mathbb{R}^n \simeq M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

$$z'(t) = \frac{d}{dt}\big(g(y(t))\big) = Dg(y(t))\, y'(t) = Dg(y(t))\, f(y(t)) \quad (*)$$

$g: E_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

↓ Regra da cadeia.

$Dg(y) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$Dg(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \\ \nabla g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$(*) = Dg(g^{-1}(z(t)))\, f(g^{-1}(z(t)))$$

Conclusão:

$$\boxed{z'(t) = \tilde{f}(z(t)), \quad \tilde{f}(z) = Dg(g^{-1}(z))\, f(g^{-1}(z)).}$$

↳ Mudança no campo de vetores.

O que ocorre com o fluxo após mudança de variável?

Seja $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fluxo de $y'(t) = f(y(t))$

$\tilde{\phi} : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fluxo de $z'(t) = \tilde{f}(z(t))$

Se $z(t) = g(y(t))$, então vimos que

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} z'(t) = \tilde{f}(z(t)) \\ z(0) = g(y_0) \end{cases}$$

(Conta da página anterior)

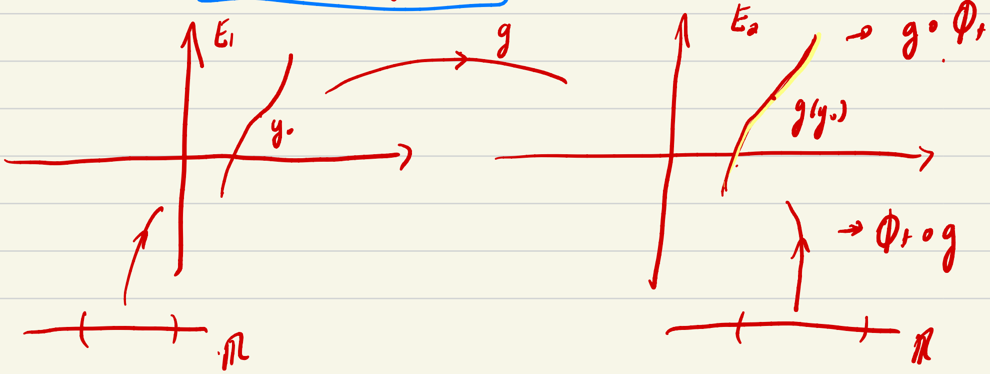
$$y(t) = \phi(y_0, t) \qquad\qquad z(t) = \tilde{\phi}(g(y_0), t)$$

Além disso $z(t) = g(y(t))$. Assim, $\underbrace{\tilde{\phi}(g(y_0), t)}_{z(t)} = g(\underbrace{\phi(y_0, t)}_{y(t)})$

<u>Conclusão</u>: Usando a notação $\phi_t(x) = \phi(x,t)$, obtemos

$$\tilde{\phi}_t(g(y_0)) = g\,\phi_t(y_0), \quad \forall y_0 \in E, \ \forall t \in \underbrace{I(y_0)}_{\text{intervalo máximo}}$$

Ou seja, $\boxed{\tilde{\phi}_t \circ g = g \circ \phi_t}$



DEFINIÇÃO: SEJAM $f_1 : E_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ E $f_2 : E_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CAMPOS DE CLASSE C^k, $k \geq 1$, E $\phi_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ E $\phi_2 : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ OS FLUXOS DE f_1 E f_2, RESPECTIVAMENTE. (g É CONJUGAÇÃO GLOBAL).

DIZEMOS QUE f_1 E f_2 SÃO CONJUGADOS SE $\exists\, g : E_1 \to E_2$ T.Q.
↳ BIJEÇÃO.

$$\boxed{g \circ \phi_{1t} = \phi_{2t} \circ g}$$

A CONJUGAÇÃO É TOPOLÓGICA SE g É UM HOMEOMORFISMO
↳ NOVIDADE.

A CONJUGAÇÃO É C^r, $r \geq 1$, SE g É UM DIFEO DE CLASSE C^r.

RECORDAÇÃO: $g : E_1 \to E_2$ É HOMEOMORFISMO SE
1) g É BIJEÇÃO.
2) g E g^{-1} SÃO CONTÍNUAS.

DIZEMOS QUE A CONJUGAÇÃO É LOCAL SE $g : U_1 \subset E_1 \to U_2 \subset E_2$ E $g \circ \phi_{1t} = \phi_{2t} \circ g$ VALE APENAS PARA $y \in U_1$.

PROPOSIÇÃO: NAS CONDIÇÕES ANTERIORES, SE $g : E_1 \to E_2$ É UM DIFEO DE CLASSE C^k, $k \geq 1$, ENTÃO g É UMA CONJUGAÇÃO $\Leftrightarrow$ $\boxed{f_2(g(y)) = Dg(y) f_1(y), \ \forall y \in E_1}$

DEMO: $(\Longrightarrow)$ $\quad g \circ \phi_{1t} = \phi_{2t} \circ g.$

DERIVANDO EM t. $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(g \circ \phi_1(y_0,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_2(g(y_0),t)\right)$

$$Dg(\phi_1(y_0,t))\underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(y_0,t)}_{= f_1(\phi_1(y_0,t))} = \underbrace{\frac{\partial \phi_2}{\partial t}(g(y_0),t)}_{= f_2(\phi_2(g(y_0),t))}$$

CONCLUSÃO: $\quad f_2(\phi_2(g(y_0),t)) = Dg(\phi_1(y_0,t))\, f_1(\phi_1(y_0,t))$

PARA $t=0$ $\quad \phi(y_0,0) = y_0$

$$\boxed{f_2(g(y_0)) = Dg(y_0)\, f_1(y_0)}$$

$(\Longleftarrow)$ SEJA $\quad \psi(y,t) := g(\phi_1(y,t))$

LOGO $\quad \boxed{\psi(y,0)} = g(\phi_1(y,0)) = \boxed{g(y)}$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t}(y,t)} = Dg(\phi_1(y,t))\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(y,t)$$

$$= Dg(\phi_1(y,t))\, f_1(\phi_1(y,t))$$

$$= f_2(g(\phi_1(y,t))) = \boxed{f_2(\psi(y,t))}$$

USAMOS LARANJA $\square$

LOGO $\psi = \phi_2(g(y),t)$, POIS $\quad \phi_2(g(y),0) = g(y)$

$\Longrightarrow \phi_{2t} \circ g = g \circ \phi_{1t}.$ $\quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t}(g(y),t) = f_2(\phi_2(g(y),t))$ $\blacksquare$

EXEMPLOS:

1) SEJAM $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_1(x,y) = (x,-y) \qquad f_2(x,y) = (x, -y + x^3)$$

AFIRMAÇÃO: f_1 E f_2 SÃO CONJUGADOS E A CONJUGAÇÃO É C^∞ E DADA POR $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad g(x,y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$.

DEMO: g É UM DIFEOMORFISMO DE CLASSE C^∞.

g É C^∞ OK (SÓ TEMOS POLINÔMIOS EM x E y).

VAMOS CALCULAR g^{-1}. $\qquad g(x,y) = (w,z) \Rightarrow (x,y) = g^{-1}(w,z)$
$\hookrightarrow (x(w,z), y(w,z))$?

$$(w,z) = g(x,y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right) \qquad \begin{aligned} &w = x \\ &z = y + \frac{x^3}{4} = y + \frac{w^3}{4} \Rightarrow y = z - \frac{w^3}{4}. \end{aligned}$$

$$g^{-1}(w,z) = \left(w, z - \frac{w^3}{4}\right) \quad \text{É } C^\infty. \quad \text{OU}$$

g E g^{-1} SÃO C^∞ OK!

VAMOS MOSTRAR QUE $Dg(x,y) f_1(x,y) = f_2(g(x,y))$.

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{4}x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = x$$
$$g_2 = y + \frac{x^3}{4}$$

CONTINUANDO

$$f_1(x,y) = (x,-y).$$

$$Dg(x,y)\, f_1(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{3}{4}x^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{4}x^3 - y\end{pmatrix}$$

SÃO IGUAIS!

$$f_2(g(x,y)) = f_2\left(x, y + \frac{x^3}{4}\right) = \left(x, -\left(y + \frac{x^3}{4}\right) + x^3\right) = \left(x, -y + \frac{3}{4}x^3\right)$$

$$f_2(x,y) = (x, -y + x^3)$$

$\blacksquare$

CONCLUSÃO: SE ϕ_1 É O FLUXO DE f_1 E ϕ_2 É FLUXO DE f_2,

ENTÃO $g \circ \phi_{1,t} = \phi_{2,t} \circ g$, OU SEJA,

Se $\begin{cases} y'(t) = f_1(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} z'(t) = f_2(z(t)) \\ z(0) = g(y_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(y(t)) = z(t)}$

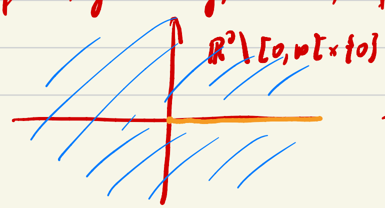
$y(t) = \phi_1(t, y_0)$ $\qquad z(t) = \phi_2(t, g(y_0))$

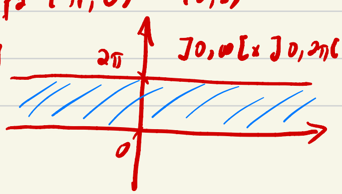
EXEMPLO 2

$f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[\times \{0\} \to \mathbb{R}^2$

$f_2 :]0,\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$.

$f_1(x,y) = (-y, x)$, $\quad f_2(r,\theta) = (0,1)$





SEJA $g:]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[$

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

g É UM CONJUGAÇÃO C^∞ ENTRE f_1 E f_2.

DEMO: g É UM DIFEO

DE FATO, g SÃO COORDENADAS POLARES.

$$Dg(r,\theta)\, f_2(r,\theta) = f_1(g(r,\theta))$$

$$g(r,\theta) = (\underbrace{r\cos\theta}_{g_1}, \underbrace{r\sin\theta}_{g_2}) \Rightarrow Dg(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$Dg(r,\theta)\, f_2(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$=$

$$f_1(g(r,\theta)) = f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta) \qquad \blacksquare$$

$$f_1(x,y) = (-y,x)$$

CONCLUSÃO: SE ϕ_1 É FLUXO DE f_1
ϕ_2 É FLUXO DE f_2

ENTÃO

$$\boxed{g \circ \phi_{2t} = \phi_{1t} \circ g}$$

VAMOS VERIFICAR DIRETAMENTE A RELAÇÃO ANTERIOR

$$\phi_{1t}(y_0, t) = y(t), \quad \begin{aligned} y'(t) &= f_1(y(t)) = (-y_2(t), y_1(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{y_{01}^2 + y_{02}^2}$$

SEJA $\psi \in \mathbb{R}$ T.Q. $(y_{01}, y_{02}) = |y_0| (\cos\psi, \operatorname{sen}\psi)$

LOGO $y(t) = |y_0| (\cos(t+\psi), \operatorname{sen}(t+\psi))$

ASSIM $\boxed{\phi_1(y_0, t) = (|y_0| \cos(t+\psi), |y_0| \operatorname{sen}(t+\psi))}$

POR OUTRO LADO, $\phi_2(r, \theta, t) = y(t)$, EM QUE $\begin{aligned} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y_1(0) &= r \\ y_2(0) &= \theta \end{aligned}$

LOGO $y(t) = (r, \theta + t)$.

ASSIM $\boxed{\phi_2(r, \theta, t) = (r, \theta + t)}$

CONCLUÍMOS QUE

$$g \circ \phi_2(r, \theta, t) = g(r, \theta + t) = (r\cos(\theta+t), r\operatorname{sen}(\theta+t))$$

$$\phi_1(g(r,\theta), t) = \phi_1(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, t) = (r\cos(\theta+t), r\operatorname{sen}(\theta+t))$$

// IGUAIS!