**PRIMEIRA PROVA - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS - MAP 5705 .**

A prova é **individual** (Atenção: Provas com resoluções iguais de questões (com cópias) serão desconsideradas). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração. Deixe claro quais os resultados estão sendo utilizados, justificando adequadamente as respostas.

**Boa Prova!**

**Exercício 1.** Considere a equação abaixo:

$$\begin{array}{rl} y_1'(t) = & y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = & 2y_1(t) + 4y_2(t) \end{array}.$$

a) Escreva a equação acima na forma matricial $y'(t) = Ay(t)$, em que $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ e $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Encontre o polinômio característico $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ e suas raízes $\lambda_1$ e $\lambda_2$ (elas correspondem aos autovalores de $A$).

c) Encontre soluções não nulas $X_1$ e $X_2$ em $\mathbb{R}^2$ dos problemas $AX_1 = \lambda_1 X_1$ e $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

d) Ache matrizes $P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, em que $D$ é uma matriz diagonal tal que $P^{-1}AP = D$.

e) Calcule $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ e a solução da equação acima quando $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 0$.

f) Faça uma representação do retrato de fase das soluções da equação acima.

**Exercício 2.** a) Considere a equação

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0.$$

Definindo $y_1(t) = x(t)$ e $y_2(t) = x'(t)$, escreva a equação na forma de um sistema de primeira ordem equivalente

$$y'(t) = Ay(t),$$

em que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, e calcule os autovalores de $A$.

b) Considere a equação

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Definindo $y_1(t) = x(t)$ e $y_2(t) = x'(t)$, escreva a equação na forma de um sistema de primeira ordem equivalente

$$y'(t) = Ay(t),$$

em que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcule o autovalor $\lambda$ de $A$ (neste caso será único), os autovetores correspondentes e a dimensão de $N(\lambda I - A) = \{X \in \mathbb{R}^2; AX = \lambda X\}$.

c) Esboce os retratos de fase das soluções de $y'(t) = Ay(t)$ para os problemas dos itens $a$) e $b$).

**Exercício 3.** Considere a seguinte equação $y'(t) = Ay(t)$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Ache matrizes $B$ diagonalizável e $N$ nilpotente tais que $A = B + N$ e $BN = NB$.

b) Calcule $e^{tB}$, $e^{tN}$ e, por fim, $e^{tA}$.

c) Determine a solução de $y'(t) = Ay(t)$, com $y(0) = (1, 1, 2)$.

**Exercício 4.** a) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que todos os seus autovalores têm parte real menor ou igual a zero. É verdade que todas as soluções de $y'(t) = Ay(t)$ são necessariamente limitadas para $t \geq 0$? Prove ou dê um contraexemplo. (Dica: Pensa o que ocorre quando $n = 2$)

b) Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ duas matrizes tais que $AB = BA$. Suponha que todos os autovalores de $A$ tenham parte real menor ou igual a zero e que todos os autovalores de $B$ tenham parte real estritamente negativa (ou seja, $< 0$). Neste caso, é verdade que todas as soluções de $y'(t) = ABy(t)$ são limitadas para $t \geq 0$? O que ocorre com as soluções quando $t \to \infty$?

**Exercício 5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(y) = y^3$.

a) Dado $y_0 \in \mathbb{R}$, determine a solução máxima da equação $y'(t) = f(y(t))$ para $y(0) = y_0$, ou seja, determine a solução e o intervalo máximo onde ela está definida.

b) Qual é o fluxo $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dessa equação? Esboce o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, conforme definido em sala de aula. (Lembre-se que $\Omega = \cup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} \times I(x) \subset \mathbb{R}^2$, em que $I(x)$ é o intervalo máximo da solução de $y'(t) = f(y(t))$ para $y(0) = x$)

c) Repita os itens $a$) e $b$) para a função $f : ]0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(y) = \frac{1}{3y^2(t)}$ e $y_0 \in ]0, \infty[$. (Observe que, como $f$ só está definida para $y > 0$, então as soluções só podem estar definidas se $y(t) > 0$. Assim, $\Omega$ é um subconjunto de $\{(y, t) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$).

**Exercício 6.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(y) = 5\,|y|^{\frac{4}{5}}$ e a equação diferencial

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = 0.$$

a) A solução dessa equação é única? Se sim, ache a única solução. Se não, determine duas soluções distintas.

b) Quando restringimos $f$ a $]0, \infty[$, obtemos $f(y) = 5y^{\frac{4}{5}}$. Neste caso, se $y_0 > 0$, a solução (que só terá valores $y(t) > 0$) será única? Justifique.

**Exercício 7.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe $C^\infty$ dado por

$$f(x, y, z) = \left(2x\text{sen}(y)z, x^2\cos(y)z, x^2\text{sen}(y)\right).$$

a) Ache todos os pontos singulares e todos os pontos regulares de $f$.

b) Existe algum ponto periódico de $f$? Se sim, determine esses pontos. Se não, justifique por que eles não existem.