PROVA SUB - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. (1,25 ponto) a) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função harmônica tal que $u(x,y) = x$, se $(x,y) \in \partial B(0,1)$. Qual é o valor de $u(0,0)$?

(1,25 ponto) b) Seja $u : \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e harmônica em $B(0,1)$. Mostre que se $(x,y) \in B(0,1)$, então

$$\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}u(0,0) \le u(x,y) \le \frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}u(0,0).$$

Dica: Observe que se $w \in \partial B(0,1)$ e $v \in B(0,1)$, então $1-|v| = |w|-|v| \le |w-v| \le |w|+|v| = 1+|v|$.

Exercício 2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada e $u : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ a única solução limitada do problema abaixo:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u(x,0) & = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}.$$

(1,5 ponto) a) Mostre que se g tem suporte compacto, isto é, se existe $R > 0$ tal que $g(x) = 0$ se $|x| > R$, então $u(x,t)$ converge uniformemente para zero quando $t \to \infty$.

(1,0 ponto) b) Se g é uma função contínua e limitada, mas sem ter suporte compacto, então a solução necessariamente vai para zero, quando $t \to \infty$? Prove ou dê um contraexemplo simples.

Exercício 3. Sejam $\rho \in C([0,1])$, $k \in C^1([0,1])$ funções estritamente positivas. Considere a equação

$$\begin{array}{lll} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right), & (x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R} \\ u(0,t) & = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) & = g(x), & x \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = h(x), & x \in [0,1] \end{array}, \tag{0.1}$$

em que g é de classe C^2 e h de classe C^1.

Considere a função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 + k(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2\right]dx.$$

(1,5 ponto) a) Mostre que $E(t)$ é uma função constante.

(1,0 ponto) b) Mostre que se o Problema (0.1) tiver uma solução $u \in C^2([0,1]\times\mathbb{R})$, então esta solução é única.

Exercício 4. (1,5 ponto) a) Resolva $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$, $u(x,0) = \operatorname{sen}(x)$ para $|x|$ pequeno.

(1,0 ponto) b) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma solução da equação abaixo:

$$y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Determine as curvas em $\mathbb{R}^2$ nas quais u é constante. Essas curvas são elipses, parábolas ou hipérboles?

Formulário. (Nem tudo é necessário)

Algumas soluções de EDO: Se $z'(s) = z(s)^2 \implies z(s) = \frac{z(0)}{1-sz(0)}$.

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| < r\}$, $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| \leq r\}$, $\partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y-x| = r\}$ e $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0,1)$.

$$|B(x,r)| := \int_{B(x,r)} dy \text{ é o volume da bola } B(x,r)$$

$$|\partial B(x,r)| := \int_{\partial B(x,r)} dS(y) \text{ é a área da bola } \partial B(x,r)$$

$$\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(y) \text{ é a área da bola unitária}$$

Por exemplo, se $n = 2$, então $|B(x,r)| = \pi r^2$ e $|\partial B(x,r)| = 2\pi r$. As médias são definidas como

$$⨍_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy \text{ e } ⨍_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y).$$

Teorema 5. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : U \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:*

1) A função u é harmônica, ou seja, $u \in C^2(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.

2) A função u é contínua e $u(x) = ⨍_{B(x,r)} u dy$, para todo $\overline{B(x,r)} \subset U$.

3) A função u é contínua e $u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u dS$, para todo $\overline{B(x,r)} \subset U$.

4) A função $u \in C^\infty(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.

Teorema 6. *(Núcleo de Poisson) Seja $f \in C(\partial B(0,1))$. Logo existe uma única função $u \in C^2(B(0,1)) \cap C\left(\overline{B(0,1)}\right)$ tal que $\Delta u(x) = 0$ para $x \in B(0,1)$ e $u(x) = f(x)$ para todo $x \in \partial B(0,1)$. Para $x \in B(0,1)$, temos*

$$u(x) = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|x|^2}{|\partial B(0,1)|}\frac{1}{|x-y|^n} f(y)\, dS(y).$$

A função $K : B(0,1) \times \partial B(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $K(x,y) = \frac{1-|x|^2}{|\partial B(0,1)|}\frac{1}{|x-y|^n}$ é chamada de núcleo de Poisson.

Teorema 7. *Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Logo*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy.$$

é a única solução limitada do problema

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \Delta u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(x,0) & = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Proposição 8. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1\left(\overline{U}\right)$. Logo*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = -\int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x), \tag{0.2}$$

em que $i \in \{1,...,n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x),...,\nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U.

Definição 9. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Logo

$$\int_{\partial U} F(x).\nu(x)\, dS(x) = \int_U \nabla.F(x)\, dx,$$

em que $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U.

Definição 10. Uma curva integral do campo $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $V = (a_1(x),...,a_n(x))$ é um caminho $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação diferencial $\boldsymbol{x}'(t) = V(\boldsymbol{x}(t))$. Assim, se $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$, então

$$\begin{array}{ccc} x_1'(t) & = & a_1(x_1(t),...,x_n(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_n(x_1(t),...,x_n(t)) \end{array}.$$

Proposição 11. *Seja $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva integral com imagem no aberto $W \subset U$ e $u : W \to \mathbb{R}$ uma solução de $\sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = f(x,u(x))$, $x \in W$. Logo $v = u \circ \boldsymbol{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma solução da equação $v'(t) = f(\boldsymbol{x}(t),v(t))$. Em particular, se $f = 0$, então $u \circ \boldsymbol{x}$ é constante.*