Lista de exercícios propostos de
Variáveis Aleatórias
Estatística I
OBS: Os exercícios estão dispostos em ordem de dificuldade.

1. (*Walpole et al. E.3.3 e 3.8*). Considere W a variável aleatória definida como o número de caras menos o número de coroas com três jogadas de uma moeda.
   (a) Considerando a moeda honesta, liste os elementos do espaço amostral para três lançamentos da moeda e, para cada ponto amostral, atribua um valor de w de W.
   (b) Assumindo que a moeda seja viciada, de modo que cara seja duas vezes mais provável de ocorrer do que uma coroa, determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória W e também a função de distribuição acumulada.
   (c) Faça um esboço do gráfico das duas funções do item anterior (f(w) e F(w)).

2. (*Walpole et al. E.4.84*). Assuma que a duração X, em minutos, de certo tipo de conversa ao telefone é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{\frac{-x}{5}} & \text{, se } x > 0 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Determine a duração média $E(X)$ desse tipo de conversa ao telefone.
   (b) Determine a variância e o desvio padrão de X.
   (c) Determine $E[(X+5)^2]$.

3. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se} \quad -1 < x < 1, \\ 0, & \textit{caso} \quad \textit{contrário} \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de c?
   (b) Obtenha a função de distribuição acumulada de X.
   (c) Calcule E(X) e V(X).

4. Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis $0, 1, 2, \ldots$, e $P(X = j) = (1-a)a^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$
   (a) Para que valores de a o modelo acima tem sentido?
   (b) Verifique que essa expressão representa uma legítima distribuição de probabilidade.

5. (*Ross, 4.5*). Suponha que $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Se $E(X) = 3V(X)$, encontre $P(X = 0)$.

6. (*Walpole et al. E.22*). Três cartas são retiradas, sucessivamente, de um baralho sem reposição. Determine a distribuição de probabilidade para a variável aleatória "número de espadas".

7. (*Walpole et al. E.4.55*). Seja X a variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade

x	-3	6	9
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Calcule $E[(2X+1)^2]$, utilizando os cálculos de $E(X)$ e $E(X^2)$

8. A demanda diária de arroz em um supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{se} \quad 0 \le x < 1, \\ \frac{-x}{3} + 1, & \text{se} \quad 1 \le x \le 3 \\ 0, & \quad caso \quad contr\acute{a}rio \end{cases}$$

(a) Qual a probabilidade, em um dia escolhido ao acaso, de se vender mais do que 150 Kg?
(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?
(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposição do público diariamente para que não falte o produto em 95% dos dias?

9. Num processo de fabricação, uma peça pode ser produzida com defeito com probabilidade 0,01. Neste caso, ela tem probabilidade igual a 0,5 de ser recuperada. O custo de cada peça produzida é R$ 1,00, que será acrescido de mais R$ 0,50, se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada peça é vendida a R$ 3,00, encontre a distribuição da variável aleatória "lucro por peça produzida". Calcule o lucro esperado.

10. (*Ross, 4.1, pag 172*). Duas bolas são escolhidas aleatoriamente e sem reposição de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 bolas pretas e 2 bolas laranja. Suponha que nós ganhamos R$ 2,00 para cada bola preta selecionada e perdemos R$ 1,00 para cada bola branca selecionada. Seja X a variável aleatória que denota nossos ganhos. Quais são os possíveis valores de X e as probabilidades associadas a cada valor?

11. Demonstre as seguintes propriedades do valor esperado de uma variável aleatória X:
(a) Se $X = C$, onde C é uma constante, então $E(X) = C$.
(b) Se C é uma constante, então $E(CX) = CE(X)$.

12. Demonstre as seguintes propriedades da variância de uma variável aleatória X:
(a) Se C for uma constante, então $V(X + C) = V(X)$.
(b) Se C for uma constante, então $V(CX) = C^2V(X)$

13. Um vendedor de cachorro quente trabalha na porta do estádio do Morumbi em dias de jogo. Ele pode deixar preparado 5, 6 ou 7 dúzias de sanduíches, que custam a ele R$ 5 a dúzia. Sabe-se que a procura por cachorro quente (X), no seu ponto, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade:

X	4	5	6	7
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Sabe-se que cada dúzia de sanduíche é vendida a R$ 12 e os sanduíches não vendidos vão para um canil que paga R$ 2 pela dúzia. Qual é o número de dúzias de sanduíches que devem ser preparados de modo a maximizar o lucro médio do vendedor?

RESPOSTAS:

1.

a) $P(W = -3) = P(W = 3) = \frac{1}{8}$ $P(W = -1) = P(W = 1) = \frac{3}{8}$

b) $P(W = -3) = \frac{1}{27}$ $P(W = -1) = \frac{2}{9}$ $P(W = 1) = \frac{4}{9}$ $P(W = 3) = \frac{8}{27}$

2. *a)* $E(X) = 5$ *b)* $\sigma^2 = 25$ e $\sigma = 5$ *c)* 125

3. *a)* $\frac{3}{4}$ *b)* $F(a) = \frac{3a}{4} - \frac{a^3}{4} + \frac{1}{2}$ *c)* $E(X) = 0$ e $V(X) = \frac{1}{5}$

4. $a)$ $0 \leq a \leq 1$ $b)$ Sim, representa uma legítima distribuição de probabilidade
5. $\frac{1}{3}$
6. $f(x=0) = 0,4135$; $f(x=1) = 0,4358$; $f(x=2) = 0,1376$; $f(x=3) = 0,0129$
7. 209
8. $a)$ 0,375 $b)$ 40 ou $4000kg$ $c)$ 2,45 ou $245kg$
9. Lucro esperado $1,98$
10. $P(X=-2) = \frac{28}{91}$ $P(X=-1) = \frac{16}{91}$ $P(X=0) = \frac{1}{91}$ $P(X=1) = \frac{32}{91}$ $P(X=2) = \frac{8}{91}$ $P(X=4) = \frac{6}{91}$
13. 6 dúzias