VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2.6

VARIÁVEL ALEATÓRIA (X)

Função que associa um valor real a cada elemento de Ω. Pode ser discreta (Ω é finito ou enumerável) ou contínua (Ω é infinito não enumerável).

$$X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$$
$$X(\omega) = x$$

Exemplos de variáveis aleatórias

X: resposta da senhora sobre a ordem de preparo da bebida

x = 0, 1

$$X = \begin{cases} 0, \text{ se erra a ordem de preparo} \\ 1, \text{ se acerta a ordem de preparo} \end{cases}$$

maiúscula: variável aleatória (v.a.)

minúscula: valores que a v.a. assume

X é uma v.a. discreta

Exemplos de variáveis aleatórias

Y: número de acertos da senhora sobre a ordem de preparo da bebida nas 4 repetições do experimento

y = 0, 1, 2, 3, 4

Y é uma v.a. discreta

T: número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo de tempo

t = 0, 1, 2, ...

T é uma v.a. discreta

H: níveis de hemoglobina no sangue (g/100ml)

$h \in \mathcal{R}_+$

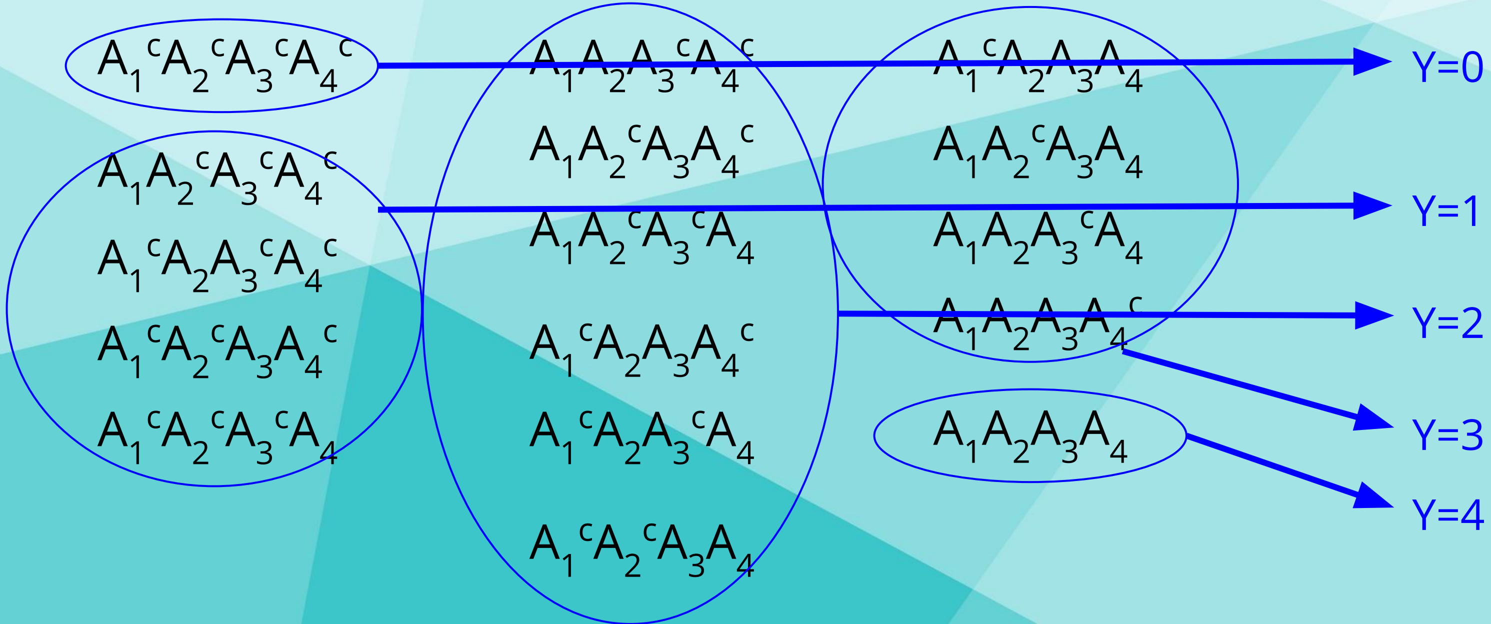
H é uma v.a. contínua

Eventos x V.A.

no caso de acerto ao acaso

A_i: a senhora acerta a ordem de preparo da xícara *i*, para *i*=1, 2, 3, 4

Y: número de acertos da senhora sobre a ordem de preparo



Eventos x V.A.

$P(A_1^cA_2^cA_3^cA_4^c)=0,5^4$

$P(A_1A_2^cA_3^cA_4^c)=0,5^10,5^3$

$P(A_1^cA_2A_3^cA_4^c)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2^cA_3A_4^c)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2^cA_3^cA_4)=0,5^4$

$P(A_1A_2A_3^cA_4^c)=0,5^4$

$P(A_1A_2^cA_3A_4^c)=0,5^4$

$P(A_1A_2^cA_3^cA_4)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2A_3A_4^c)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2A_3^cA_4)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2^cA_3A_4)=0,5^4$

$P(A_1^cA_2A_3A_4)=0,5^4$

$P(A_1A_2^cA_3A_4)=0,5^4$

$P(A_1A_2A_3^cA_4)=0,5^4$

$P(A_1A_2A_3A_4^c)=0,5^4$

$P(A_1A_2A_3A_4)=0,5^4$

$P(Y=0) = 0,5^4$

$P(Y=1) = 4.0,5^4$

$P(Y=2) = 6.0,5^4$

$P(Y=3) = 4.0,5^4$

$P(Y=4) = 0,5^4$

função de probabilidade de Y
(ou função massa de probabilidade)

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Se X é uma v.a. discreta com possíveis valores no conjunto R_X. Uma função f(x) é uma *função de probabilidade* (fp) se:

$$(i) 0 \leq f(x_i) \leq 1$$

$$(ii) P(X = x_i) = f(x_i), \text{ para } x_i \in R_x$$

$$(iii) \sum_{x_i \in R_x} f(x_i) = 1$$

y	0	1	2	3	4
f(y)	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

Qual a probabilidade de acertar 3 ou mais xícaras ao acaso?

$P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) = 0{,}3125$

Quantas xícaras é esperado (em média) que ela acerte ao acaso?

$E(Y) = 2$ **esperança**

Qual a probabilidade de ela acertar menos do que o esperado?

$P(Y<2) = P(Y=0) + P(Y=1) = 0{,}3125$

$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = 0{,}6875$

função de distribuição acumulada

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Se X é uma v.a. discreta com possíveis valores no conjunto R_X e função de probabilidade f(x), a *função de distribuição acumulada* (fda) de X *é*:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

y	0	1	2	3	4
f(y)	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

y	0	1	2	3	4
F(y)	0.0625	0.3125	0.6875	0.9375	1

Propriedades de F(x)

1. Para todo x, $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. F(x) é uma função monótona não decrescente.
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. Se $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, em que $x_1 < x_2 < \ldots$, então $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.
5. Se a e b são tais que a<b, então

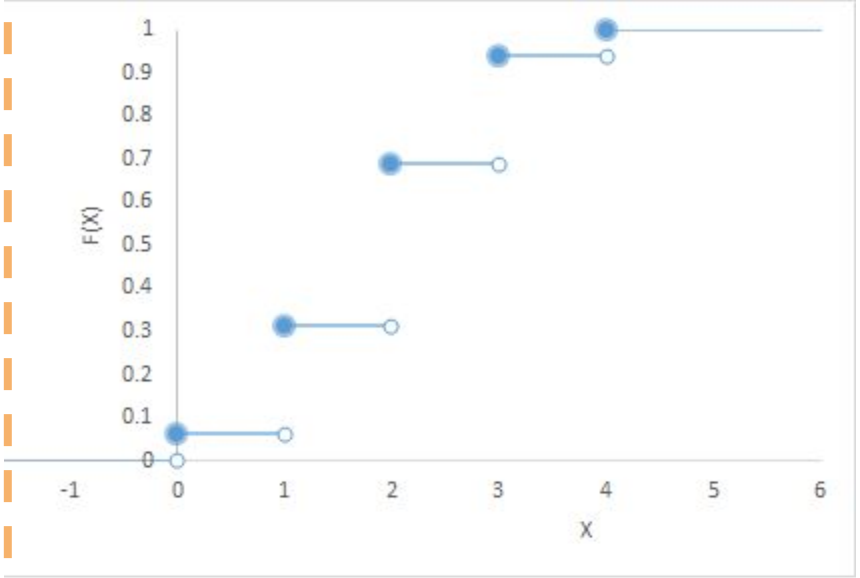
$(i)\ P(X \leq a) = F(a)$,

$(ii)\ P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$,

$(iii)\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,

$(iv)\ P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$ e

$(v)\ P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$.



ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO

Se X é uma v.a. discreta, seu valor esperado é dado por:

$$E(X) = \sum_{x:f(x)>0} x f(x)$$

No caso de independência e acerto ao acaso

Y: número de acertos
y = 0, 1, 2, 3, 4

$P(Y=0) = (1-0{,}5)^4 = 0{,}0625$

$P(Y=1) = 4 .\ 0{,}5^1.(1-0{,}5)^3 = 0{,}25$

$P(Y=2) = 6 .\ 0{,}5^2.(1-0{,}5)^2 = 0{,}375$

$P(Y=3) = 0{,}25$

$P(Y=4) = 0{,}0625$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i . f(y_i)$$

$= 0 . 0{,}0625 + 1 . 0{,}25 + 2 . 0{,}375 + 3 . 0{,}25 + 4 . 0{,}0625 = 2$

No caso de dependência

(sabe-se que são 2 de cada tipo e revela-se qual bebida provou, após cada resposta da senhora)

E(Y)=2,8

Esperança (ou valor esperado) é a média teórica

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}$$

probabilidades

= 0 . 0,0625 + 1 . 0,25 + 2 . 0,375 + 3 . 0,25 + 4 . 0,0625 = 2

valores que a variável assume

Ex: Uma amostra, $n = 16$

$x_1 = 4$ $x_7 = 1$ $x_{13} = 2$

$x_2 = 1$ $x_8 = 0$ $x_{14} = 3$

$x_3 = 2$ $x_9 = 3$ $x_{15} = 1$

$x_4 = 3$ $x_{10} = 1$ $x_{16} = 2$

$x_5 = 2$ $x_{11} = 2$

$x_6 = 3$ $x_{12} = 2$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

$$= \frac{0 . 1 + 1 . 4 + 2 . 6 + 3 . 4 + 4 . 1}{16}$$

$\frac{1}{16} = 0,625$: freq. relativa de "0" na amostra

ESPERANÇA DE FUNÇAO DE UMA V.A.

Se Y = h(X), o valor esperado de Y é:

$$E[h(X)] = \sum_{x:f(x)>0} h(x).\, f(x)$$

em que f(x) é a função de probabilidade de X.

X variável aleatória discreta

x	$f(x)$
-1	$0{,}3$
0	$0{,}4$
1	$0{,}3$

$$E(X) = (-1).0{,}3 + 0.0{,}4 + 1.0{,}3$$
$$= 0$$

Defino $Y = X^2$

$(-1)^2 = 1$

$0^2 = 0$

$1^2 = 1$

$P(Y=0) = 0{,}4$

$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1)$
$= 0{,}6$

$$E(Y) = 0.0{,}4 + 1.0{,}6 = 0{,}6$$

ou

$$E(Y) = E(X^2) = \sum_{x: f(x)>0} x^2 . f(x) = (-1)^2.0{,}3 + 0^2.0{,}4 + 1^2.0{,}3$$
$$= 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$$

VARIÂNCIA

A variância de uma v.a. X é dada por:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2], \text{ em que } \mu = E[X]$$

V(X) é também denotada por σ^2

Fórmula alternativa para a variância

$$V(X) = E[(X-\mu)^2], \text{ em que } \mu = E[X]$$
$$= \sum_{x:f(x)>0} (x-\mu)^2 . f(x)$$
$$= \sum_{x:f(x)>0} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) . f(x)$$
$$= \sum_x x^2 . f(x) - 2\mu \sum_x x . f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$
$$= E(X^2) - E^2(X)$$

No caso de independência e acerto ao acaso

Y: número de acertos
y = 0, 1, 2, 3, 4

$P(Y=0) = 0{,}0625$
$P(Y=1) = 0{,}25$
$P(Y=2) = 0{,}375$
$P(Y=3) = 0{,}25$
$P(Y=4) = 0{,}0625$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) =$$
$$= 0 \times 0{,}0625 + 1 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}375 + 9 \times 0{,}25 + 16 \times 0{,}0625 - 4$$
$$= 1$$

USE A OUTRA FÓRMULA E CHEGUE AO MESMO RESULTADO!

Propriedades da Esperança e da Variância

Se X e Y são variáveis aleatórias e *a* e *b* são números reais:

- $E(a)=a$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- $V(a)=0$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- Se X e Y são **independentes**, então: $V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$

Se X é uma v.a. contínua

Definições de função de densidade de probabilidade, (fdp), acumulada, esperança e variância análogas às apresentadas para variáveis discretas, com ∑ substituído por ∫.

Função densidade de probabilidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Note que P(X=a)=0

Função de distribuição acumulada:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

do teorema fundamental de Cálculo:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Se X é uma v.a. cóntínua

Definições de função de distribuição (densidade) de probabilidade, acumulada, esperança e variância análogas às apresentadas para variáveis discretas, com ∑ substituído por ∫.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.\, f(x)dx$$

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x).\, f(x)dx$$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2.\, f(x)dx$$
$$= E(X^2) - E^2(X)$$

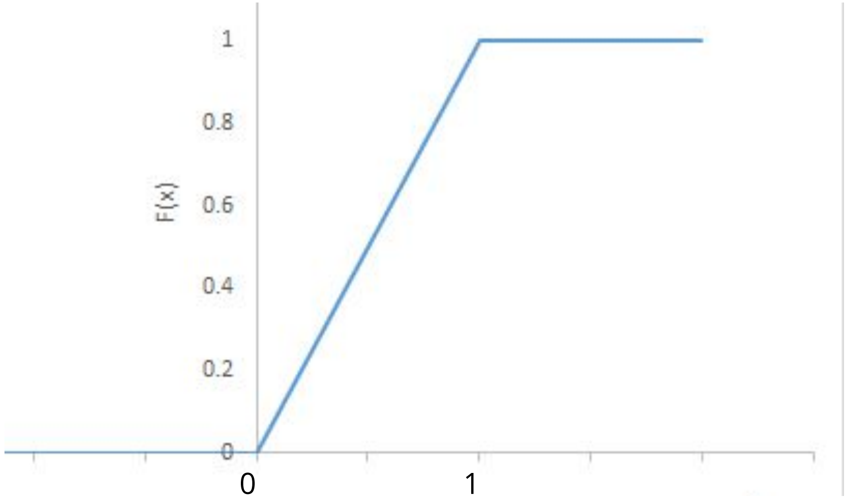
Exemplo: distribuição contínua

Suponha X uma v.a. com a seguinte fdp, chamada Uniforme(0,1):

$$f(x) \begin{cases} = 1, \ \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ = 0, \ \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Ideia intuitiva da distribuição é escolher um ponto aleatório em (0,1).

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, \ \text{para x<0} \\ x, \ \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, \ \text{para } x > 1 \end{cases}$$



Exemplo: distribuição contínua

(i) Qual a probabilidade de X<0,1?

$\int_0^{0,1} f(x)dx = x|_0^{0,1} = 0,1$ ou $F(0,1) = P(X \leq 0,1) = 0,1$

(ii) Qual a esperança e a variância de X?

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x.1dx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = 0,5$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^1 x^2 f(x)dx - 0,5^2 = \frac{1}{12}$$

média teórica (calculada com a função de distribuição de probabilidade de X)