PROBABILIDADE CONDICIONAL

2.4

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Se A e B $\subseteq \Omega$, eventos, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B)>0.$$

Note que: $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$

A fração de vezes que A ocorre dentre aquelas que B ocorre

$P(A|B)$

$P(\cdot\,|B)$ satifaz os axiomas da probabilidade:

- $0 \leq P(A|B) \leq 1, \ \forall \ A \subset \Omega$
- $P(\Omega|B) = 1$
- Se $A_1, A_2, \ldots$ são mutuamente exclusivos:

  $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$

A fração de vezes que A ocorre dentre aquelas que B ocorre

$P(A|B)$

$P(\cdot\,|B)$ satifaz as propriedades:

- $P(\varnothing|B) = 0$
- Se $A \subset \Omega$, $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- Se $A, C \subset \Omega$, então:

  $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$

B interfere em A?
$P(A) \times P(A \mid B)$

Exemplo 1:

No lançamento de dois dados.

A: sair 6 no primeiro

B: sair 6 no segundo

Exemplo 2:

Na população de mulheres em idade fértil.

A: atraso menstrual

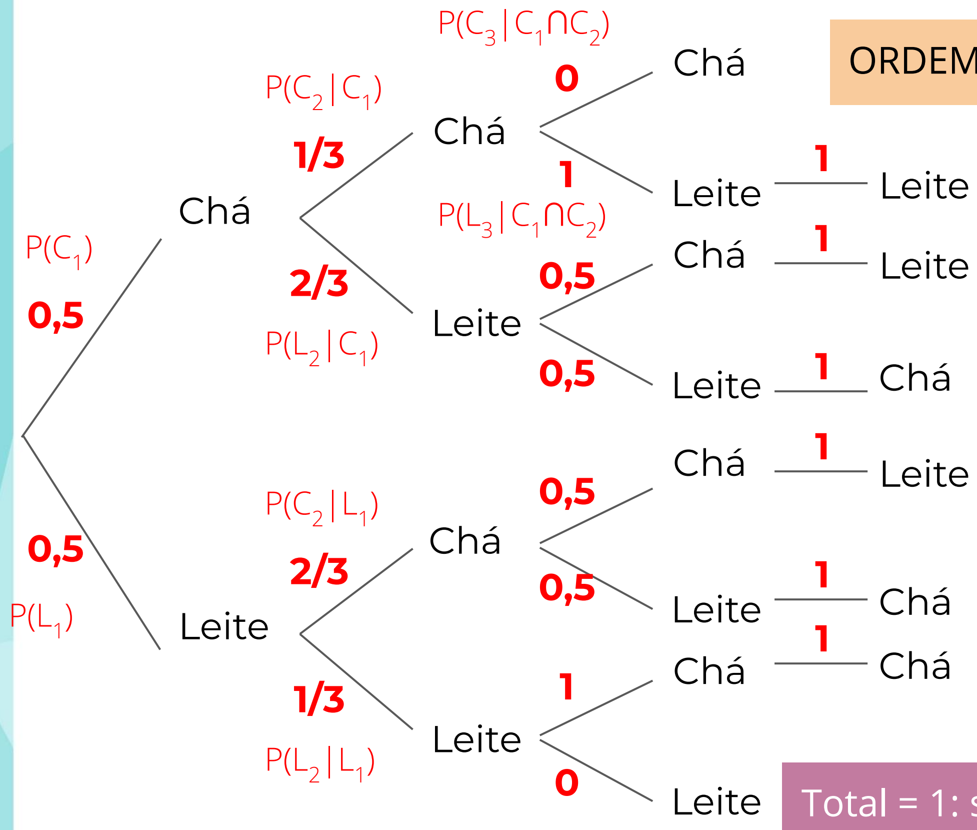
B: estar grávida

EXPERIMENTO SENHORA TOMA CHÁ

- 4 xícaras de chá: 2 leite+chá e 2 chá+leite
- escolhe-se aleatoriamente a xícara a ser oferecida em cada prova
- a cada xícara que ela prova, revela-se qual a ordem de preparação usada, após ela emitir sua opinião
- suponha que a senhora não consegue distingui-las pelo paladar
- a senhora usa seu conhecimento prévio do experimento e seus conhecimentos de probabilidade para dar o próximo palpite

Probabilidade condicional: árvore de probabilidades

ORDEM DE OFERECIMENTO DAS XÍCARAS



$P(C_1C_2L_3L_4) = P(C_1).P(C_2|C_1).P(L_3|C_1 \cap C_2).P(L_4|C_1 \cap C_2 \cap L_3$

$P(C_1L_2C_3L_4) = 0{,}5 \,.\, 0{,}67 \,.\, 0{,}5.\ 1 = 0{,}167$

$P(C_1L_2L_3C_4) = 0{,}5 \,.\, 0{,}67 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1 = 0{,}167$

$P(L_1C_2C_3L_4) = 0{,}5 \,.\, 0{,}67 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1 = 0{,}167$

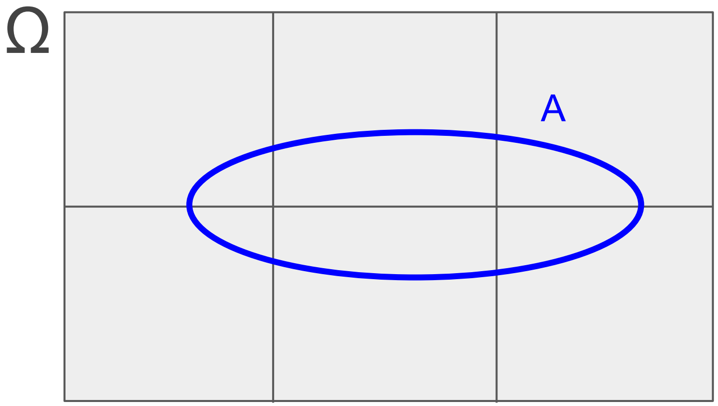
$P(L_1C_2L_3C_4) = 0{,}5 \,.\, 0{,}67 \,.\, 0{,}5 \,.\, 1 = 0{,}167$

$P(L_1L_2C_3C_4) = 0{,}5 \,.\, 0{,}33 \,.\, 1 \,.\, 1 = 0{,}167$

Total = 1: soma de eventos mutuamente exclusivos que formam uma partição de Ω

Qual a probabilidade de ela acertar as 4 xícaras?

Partição: $(C_1C_2L_3L_4)$, $(C_1L_2C_3L_4)$, $(C_1L_2L_3C_4)$, $(L_1C_2C_3L_4)$, $(L_1C_2L_3C_4)$, $(L_1L_2C_3C_4)$



evento A: acertar as 4 xícaras

$$P(A) = P(A \cap (C_1C_2L_3L_4)) + P(A \cap (C_1L_2C_3L_4)) + P(A \cap (C_1L_2L_3C_4)) + P(A \cap (L_1C_2C_3L_4)) + P(A \cap (L_1C_2L_3C_4)) + P(A \cap (L_1L_2C_3C_4))$$

$$= 0 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0 = 16{,}68\%$$

FÓRMULA DA PROBABILIDADE TOTAL

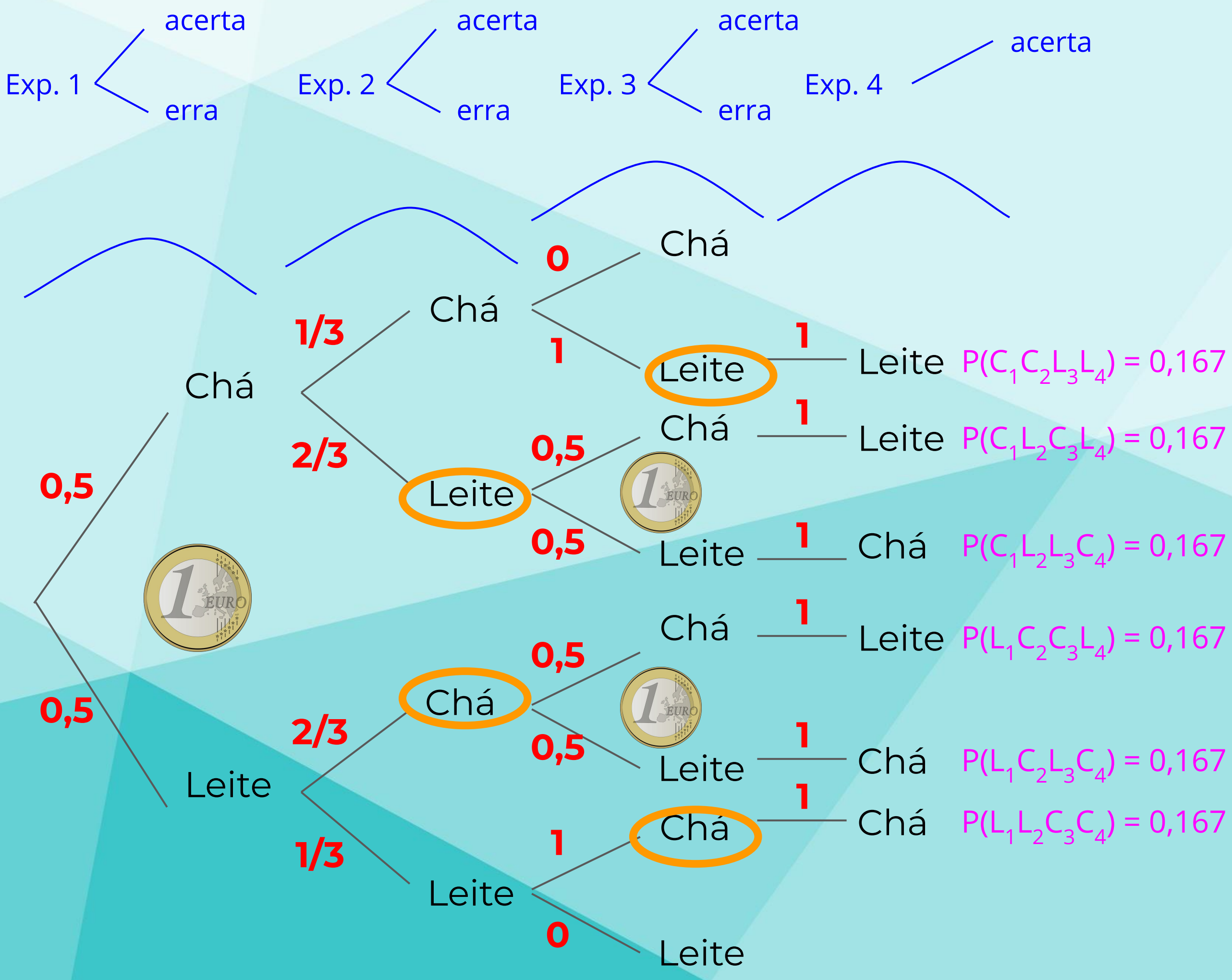
Se $(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k)$ uma partição de Ω e $A \subseteq \Omega$, então:

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A|B_1) + P(B_2) \,.\, P(A|B_2) + \ldots + P(B_k) \,.\, P(A|B_k)$$

FÓRMULA DE BAYES

Se $(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k)$ uma partição de Ω e $A \subseteq \Omega$, então:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$



Estratégia da senhora: escolhe a preparação com maior probabilidade de ocorrer

“Árvore” de probabilidades

Sai	P(sair)	Fala	P(A)	Sai	P(sair)	Fala	P(A)	Sai	P(sair)	Fala	P(A)	Prob	Y: nº acertos	Y * Prob	Result1	Result2	Result3
Chá	0.5	A: fala chá	0.5	Chá	0.33	A: fala chá	0.00	Chá	0			0		0	1	1	
	0.5		0.5		0.33		0.00		0			0		0	1	1	
	0.5		0.5		0.33		0.00	Leite	1	A: fala leite	1	0	4	0	1	1	
	0.5		0.5		0.33		0.00		1	E: fala chá	0	0	3	0	1	1	
	0.5		0.5		0.33	E: fala leite	1.00	Chá	0			0		0	1	0	
	0.5		0.5		0.33		1.00		0			0		0	1	0	
	0.5		0.5		0.33		1.00	Leite	1	A: fala leite	1	0.0833	3	0.2500	1	0	
	0.5		0.5		0.33		1.00		1	E: fala chá	0	0	2	0	1	0	
	0.5		0.5	Leite	0.67	A: fala leite	1.00	Chá	0.5	A: fala chá	0.5	0.0417	4	0.1667	1	1	
	0.5		0.5		0.67		1.00		0.5	E: fala leite	0.5	0.0417	3	0.1250	1	1	
	0.5		0.5		0.67		1.00	Leite	0.5	A: fala leite	0.5	0.0417	4	0.1667	1	1	
	0.5		0.5		0.67		1.00		0.5	E: fala chá	0.5	0.0417	3	0.1250	1	1	
	0.5		0.5		0.67	E: fala chá	0.00	Chá	0.5	A: fala chá	0.5	0	3	0	1	0	
	0.5		0.5		0.67		0.00		0.5	E: fala leite	0.5	0	2	0	1	0	
	0.5		0.5		0.67		0.00	Leite	0.5	A: fala leite	0.5	0	3	0	1	0	
	0.5		0.5		0.67		0.00		0.5	E: fala chá	0.5	0	2	0	1	0	
	0.5	E: fala leite	0.5	Chá	0.33	A: fala chá	0.00	Chá	0			0		0	0	1	
	0.5		0.5		0.33		0.00		0			0		0	0	1	

$$P(A) = P(A \cap (C_1C_2L_3L_4)) + P(A \cap (C_1L_2C_3L_4)) + P(A \cap (C_1L_2L_3C_4)) +$$

$$P(A \cap (L_1C_2C_3L_4)) + P(A \cap (L_1C_2L_3C_4)) + P(A \cap (L_1L_2C_3C_4))$$

$$= 0 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0{,}0417 + 0 = 16{,}68\%$$

Exemplo: seguradora

Uma seguradora oferece apólices anuais a seus clientes classificando-os em dois grupos: aqueles propensos a acidentes, que correspondem a 45% de sua carteira de clientes, e aqueles não propensos a acidentes, correspondendo aos 55% restantes. Acidentes ocorrem com uma probabilidade de 12% no grupo propenso a acidentes e 8% no não propenso.

(i) Se um novo cliente chega para contratar o serviço, qual a probabilidade de ele ter um acidente dentro da apólice vigente?

(ii) Dado que houve um acidente, qual a probabilidade de que tenha sido com um cliente do grupo não propenso a acidentes?

Respostas: (i) 0,098   (ii) 0,45

Exemplo: seguradora

P: propenso

P^c: não "

A: ter acidente

$P(P) = 0{,}45$

$P(P^c) = 0{,}55$

$P(A/P) = 0{,}12$

$P(A/P^c) = 0{,}08$

(i) $P(A) = ?$

(ii) $P(P^c/A) = ?$

(i) $P(A) = P(A \cap P) + P(A \cap P^c)$

$= P(A/P) . P(P) + P(A/P^c) . P(P^c)$

$= 0{,}12 . 0{,}45 + 0{,}08 . 0{,}55 = 0{,}098$ //

(ii) $P(P^c/A) = \dfrac{P(A \cap P^c)}{P(A)} = \dfrac{P(A/P^c) . P(P^c)}{P(A)}$

$= \dfrac{0{,}08 . 0{,}55}{0{,}098} = 0{,}45$ //

INDEPENDÊNCIA

2.5

EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos A e B em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A.

$$P(A|B) = P(A), \text{ em que } P(B)>0$$

Independência

Pode ser assumida ou verificada por uma das condições:

- ➢ $P(A|B) = P(A)$, em que $P(B)>0$
- ➢ $P(B|A) = P(B)$, em que $P(A)>0$
- ➢ $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

Consequências, se A e B são independentes:

A^c e B são independentes

A^c e B^c são independentes

A e B^c são independentes

Senhora toma chá

Sob que condições é razoável supor independência entre os acertos?

A_i: a senhora acerta a ordem de preparo da xícara *i*, para *i*=1, 2, 3 e 4

- ~~4 xícaras de chá: 2 leite+chá e 2 chá+leite~~
- escolhe-se aleatoriamente a xícara a ser oferecida em cada prova
- ~~a cada xícara que ela prova, revela-se qual a ordem de preparação usada, após ela emitir sua opinião~~
- suponha que a senhora não consegue distingui-las pelo paladar
- ~~a senhora usa seu conhecimento prévio do experimento e seus conhecimentos de probabilidade para dar o próximo palpite~~

Senhora toma chá

- ➢ Sob a condição de independência de A_i's
- ➢ Seja p a probabilidade de acertar a ordem de preparo de cada xícara
- ➢ Errar a primeira e acertar as demais:
  $P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1^c) \,.\, P(A_2) \,.\, P(A_3) \,.\, P(A_4) = (1-p).p^3$
- ➢ Acertar 3 ou mais ao acaso (p=0,5):

  $P(A_1^cA_2A_3A_4) + P(A_1A_2^cA_3A_4) + P(A_1A_2A_3^cA_4) + P(A_1A_2A_3A_4^c) + P(A_1A_2A_3A_4)$

  $= 4 \,.\, (0{,}5)^3 \,.\, (0{,}5)^1 + (0{,}5)^4 = 0{,}25 + 0{,}0625 = 31{,}25\%$

Exemplo

Um atirador acerta 80% de seus disparos e outro (nas mesmas condições de tiro), 70%. Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores disparam simultaneamente?

B_i :"o atirador acerta o alvo", i =1,2

$P(B_1)=0,8$

$P(B_2)=0,7$

sob independência

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1).P(B_2)$$

$$= 0,8 + 0,7 - 0,8.0,7 = 0,94$$

Exercício: Paradoxo de Monty Hall

Quebrando a banca (2008)

1: 18 expõe o problema

Esclareça o raciocínio matemático usando probabilidade condicional e definindo os eventos pertinentes.