IC para uma proporção populacional

Cada observação pode ser classificada como **sucesso** (X = 1) ou **fracasso** (X = 0) e a **probabilidade de sucesso** é *p*. Dispomos de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vimos, pelo TCL, que

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1),$$

aproximadamente (para um tamanho de amostra grande), em que $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é a proporção amostral de sucessos.

Para um nível confiança fixado em 100(1- α)%, obtemos

$$\mathrm{P}\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\boxed{p(1-p)}}{n}} \leq p \leq \overline{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\boxed{p(1-p)}}{n}}\right) \cong 1 - \alpha.$$

Mas qual valor considerar para *p*(1-*p*)?

a. Abordagem **otimista**

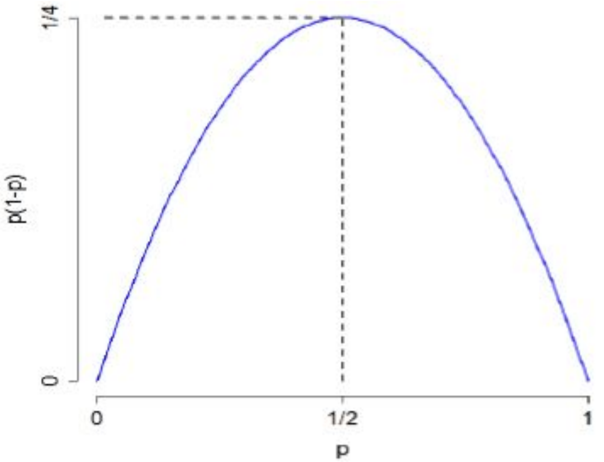
Substituir $p(1-p)$ por $\overline{p}(1-\overline{p})$. Assim, um **IC de 100(1- α)% para a proporção *p*** é dado por

$$IC \cong \left[\overline{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}};\ \overline{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right].$$

b. Abordagem **conservativa**

Substituir p(1 – p) por ¼, que corresponde ao valor máximo de p(1 – p). Nesse caso, um **IC de 100(1- α)% para a proporção *p*** é dado por

$$IC \cong \left[\overline{p} - z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}};\ \overline{p} + z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}}\right].$$

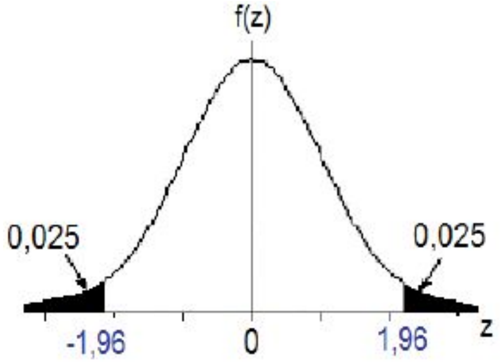


Exemplo

Um estudo foi realizado para determinar a **proporção** de componentes de um certo tipo que resistem durante um certo período a condições de uso mais rigorosas do que as especificadas. Em uma **amostra** de **200** componentes selecionados ao acaso, **160 resistiram**. Apresente um intervalo de **95%** de confiança para a proporção de componentes que resistem.

Solução. Estimativa pontual de *p*: $\bar{p} = \frac{160}{200} = 0,8 \ (80\%).$

Como 1 – α = 0,95, obtemos da tabela normal padrão $z_{0,025} = 1,96$.



Abordagem <u>otimista</u>:

$$IC \cong \left[0,8 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{200}} ; 0,8 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{200}}\right] = [0,745; 0,855]$$

Abordagem <u>conservativa</u>:

$$IC \cong \left[0,8 - 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}} ; \ 0,8 + 1,96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}}\right] = [0,731; 0,869]$$

Determinação do tamanho da amostra para estimação de p

Erro máximo de estimação de *p* é **fixado**:

$$E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \Rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p(1-p)}{E^2}.$$

a. **Há informação sobre *p*:** *p** (estudos anteriores, especialistas, amostra piloto, etc):

$$\boxed{n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p^*(1-p^*)}{E^2}.}$$

b. **Não há informação sobre *p*:** *p*(1 – *p*) é substituído pelo valor máximo, igual a ¼:

$$\boxed{n = \frac{z^2{}_{\alpha/2}}{4E^2} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E}\right)^2.}$$

Exemplo

Uma equipe pretende estimar a **proporção** de avarias ocorridas no transporte de um produto. **Estudos anteriores** indicam que esta proporção **não ultrapassa 20%.** Que tamanho de amostra é necessário para assegurar com uma **confiança de 99%** que o **erro** de estimação desta proporção seja no **máximo igual a 0,05**?

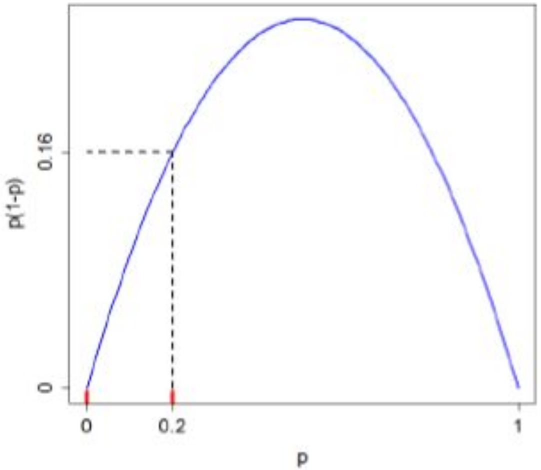
Solução. Do enunciado obtemos p ≤ 0,2, $1 - \alpha = 0{,}99$ e E = 0,05. Da tabela normal padrão, $z_{0{,}005} = 2{,}575$.

Proteção em relação à situação mais desfavorável: ***p* = 0,20***.

Finalmente,

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p^*(1-p^*)}{E^2} = \frac{2{,}575^2 \times 0{,}2 \times (1-0{,}2)}{0{,}05^2} = 424{,}4$$

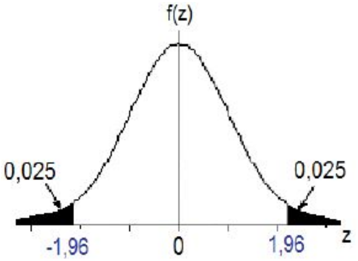
$$\Rightarrow n = 425.$$



Exemplo

Deseja-se estimar a proporção *p* de animais contaminados com uma determinada doença. Qual deve ser o tamanho de amostra suficiente para garantir que a proporção *p* possa ser estimada com um **erro absoluto menor que 0,02** com **probabilidade 0,95**? Admita que nada se sabe sobre o valor de *p*.

Solução. Do enunciado: não há informação sobre *p*, 1 – α = 0,95 e E = 0,02. Da tabela normal padrão, $z_{0,025} = 1,96$.



Assim,

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4E^2} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E}\right)^2 = \left(\frac{1,96}{2 \times 0,02}\right)^2 = 2401.$$