Determinante de uma matriz quadrada

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP

Abril de 2020

Determinante

O determinante de uma matriz, representado por $\det(A) = |A|$, é uma operação que definiremos sobre matrizes quadradas.

Ordem da matriz A: $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinante

Definimos o determinante de uma matriz quadrada A em duas partes, dependendo da ordem da matriz:

a) Para matrizes 2×2, e

b) Para matrizes $n \times n$, com $n > 2$.

Determinante

Definimos o determinante de uma matriz quadrada A em duas partes, dependendo da ordem da matriz:

a) Para matrizes 2×2, e

b) Para matrizes $n \times n$, com $n > 2$.

a) Se a matriz quadrada A, é de ordem 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinante

b) Se A é $n \times n$, com $n > 2$, então define-se recursivamente o determinante como:

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \, det\left(A_{1j}\right)$$

Onde a matriz A_{ij} é a matriz obtida a partir de A eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Portanto, A_{1j} é a matriz obtida a partir de A eliminando a primeira linha e a j-ésima coluna.

Determinante

Dada a matriz A: 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Determinante

Dada a matriz A: 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Determinante

Se A é $n \times n$ $(n = 3)$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} a_{1j} \, det\left(A_{1j}\right)$$

$$det(A) = (-1)^2 a_{11} \, det(A_{11}) + (-1)^3 a_{12} \, det(A_{12}) \\ +(-1)^4 a_{13} \, det(A_{13})$$

Determinante

Se A é $n \times n$ $(n = 3)$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j+1} a_{1j}\, det\left(A_{1j}\right)$$

$$det(A) = (-1)^2 a_{11}\, det(A_{11}) + (-1)^3 a_{12}\, det(A_{12}) \\ +(-1)^4 a_{13}\, det(A_{13})$$

$$det(A) = a_{11}\, det(A_{11}) - a_{12}\, det(A_{12}) \\ +a_{13}\, det(A_{13})$$

Determinante

Se A é $n \times n$ $(n = 3)$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$det(A) = a_{11}\, det(A_{11}) - a_{12}\, det(A_{12}) + a_{13}\, det(A_{13})$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Para calcular o determinante de uma matriz 3×3 devem ser calculados os determinantes de 3 sub-matrizes 2×2.

Determinante

Se A é $n \times n$ $(n = 3)$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$det(A) = a_{11}\, det(A_{11}) - a_{12}\, det(A_{12}) \\ + a_{13}\, det(A_{13})$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Determinante

Se A é $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = a_{11}\, det(A_{11}) - a_{12}\, det(A_{12})$$
$$+a_{13}\, det(A_{13}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\, det(A_{1n})$$

Para a matriz $n \times n$ devem ser calculadas n sub-matrizes de ordem $(n-1) \times (n-1)$.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Determine $|A|$

Resolução:

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Determine $|A|$

Resolução:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Determine $|A|$

Resolução:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \neq 0$$

Então existe inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine $|A|$. Se a inversa de A existe, determine a inversa.

Resolução:

$$|A| = -15$$

Portanto, a inversa de A existe.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$|A| = -15$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{15}\right) \begin{bmatrix} 15 & -10 & 5 & -10 \\ -15 & 16 & -5 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades do Determinante

1. $\det(A) \neq 0 \iff Existe\ a\ inversa\ de\ A$
2. $\det(A) \neq 0 \iff AX = B\ tem\ solução\ única.$
3. $\det(A) \neq 0 \iff AX = 0\ tem\ solução\ única\ X = 0.$
4. O determinante de A é zero se e somente se existe solução não trivial para AX=0.
5. Se trocarmos de posição duas linhas o determinante troca de sinal.
6. Se multiplicamos uma linha de uma matriz por uma constante, o determinante é multiplicado por esta constante.

Propriedades do Determinante

7. Se somamos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante o determinante não muda.
8. O determinante de uma matriz com duas linhas ou colunas iguais é zero.
9. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
10. $\det(A) = \det(A^t)$