ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 2 - Matrizes

Todo sistema de equações lineares deve ser resolvido utilizando o método de eliminação Gauss ou Gauss-Jordan.

1. Aplique a eliminação de Gauss para decompor a matriz A em uma matriz triangular inferior L e outra triangular superior U, tal que $A = LU$, (se possível) para

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \\ -2 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Utilize a decomposição LU da matriz A, para resolver as equações a seguir:

   (a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

3. Sejam a e b coeficientes escalares. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 3y + z = b \\ 2x + ax + 3z = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}.$$

   (a) Discuta o sistema em função dos coeficientes a e b.

   (b) Decomponha a matriz dos coeficientes (A) com $a = 6$, na forma $A = LDU$.

4. Responda verdadeiro ou falso, justificando. Para todos os casos considere matrizes quadradas.

   (a) Se $A^2 = -2A^4$, então $\left(I_n + A^2\right)\left(I_n - 2A^2\right) = I_n$.

   (b) Se $A = P^t DP$, onde D é uma matriz diagonal e P é uma matriz, então $A^t = A$.

   (c) Se D é uma matriz diagonal, então $DA = AD$, para toda matriz A, $n \times n$.

   (d) Se $B = AA^t$, então $B = B^t$.

   (e) Se B e A são tais que $A = A^t$ e $B = B^t$ então $C = AB$, é tal que $C^t = C$.

5. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & z-1 \\ z+3 & -1 & 2y \\ z-5 & 8 & x-2z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & x+y \\ x+2 & -1 & z-2x \\ y-1 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

   Se $A = B$, determine o valor de $x + y + z$, se possível. Se sim, qual o valor?. Se não, explique.

6. Determine uma equação que relacione a, b e c para que o sistema linear abaixo tenha solução para quaisquer valores de a, b e c que satisfazem essa equação.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ 5z + 3x - y = b \\ x + 2z - 3y = c \end{cases}.$$

7. Calcular as matrizes inversas (se possível) de

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} cosh(x) & senoh(x) \\ senoh(x) & cosh(x) \end{bmatrix}$ lembrar as identidades $\begin{cases} cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ senoh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \end{cases}$.

8. (Utilize o cálculo da matriz inversa) Considerando que as temperaturas não conhecidas nos pontos da Figura [1], são valores promédios dos valores próximos dela, determine as temperaturas T_1, T_2, T_3 e T_4.

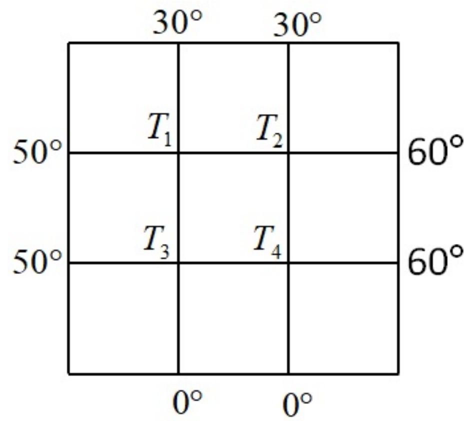

Figura 1: Temperaturas em uma placa quadrada. As temperaturas nos pontos da fronteira são conhecidas.

9. Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a função (transformação) matricial definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   (a) Determine x, y e z tais que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (b) Determine também a matriz resultante de $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$.

10. (Resolva utilizando o cálculo da matriz inversa) Considere um processo industrial cuja matriz é

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Determine a matriz de entrada para cada uma das seguintes matrizes resultantes:

   (a) $\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$.

11. Determine coeficientes a, b e c da equação da circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que passa pelos pontos $P = (-2, -2)$, $Q = (-4, 1)$, $R = (1, 3)$.