Lista 8 - Autovalores e Formas quadráticas - Gabarito

1. Transforme o triângulo de vêrtices $A = (2, -2)$, $B = (1, 5)$ e $C = (-2, 0)$ realizando uma rotação de 30° e depois uma reflexão na origem. O resultado é diferente se é realizada primeiro a reflexão e depois a rotação? Desenhe os resultados.
   Resposta: Os vértices são transformados em $A' = \left(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right)$, $B' = \left(\frac{1}{2}(5-\sqrt{3}), -\frac{1}{2}(1+5\sqrt{3}\right)$ e $C' = \left(\sqrt{3}, 1\right)$. O resultado é o mesmo, se é rodado e refletido ou refletido e depois rodado. O desenho está na Figura 1.

2. Escreva os autoespaços da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.
   Resposta: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda(-5+\lambda)$. Resolvendo a equação característica obtemos os candidatos a autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$.
   Observar que o vetor nulo nunca será autovetor (pela definição) mas o valor zero (nulo) pode ser autovalor.
   Calculando os autovetores para cada λ, temos os autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, logo os autoespaços são $S_1 = \left\{ r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\}$ e $S_2 = \left\{ r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\}$

3. Exercício 17 da Seção 9.4 do livro de Kolman (8° edição).
   Resposta no livro do Kolman.

4. Exercício 22 da Seção 9.4 do livro de Kolman (8° edição).
   Resposta: São $g1(\mathbf{X})$, $g2(\mathbf{X})$ e $g4(\mathbf{X})$. Observar que a nulidade é 1 em todos.

5. Considere a matriz A da forma quadrática $2x^2 + xy + 3xz + 4y^2 - yx + 3yz + 7z^2 - 2zx + 6zy$ (sem comutar os fatores), verifique que 3 e 1 são autovalores de A e verifique que $(1, 1, 2)$ é um autovetor de A.

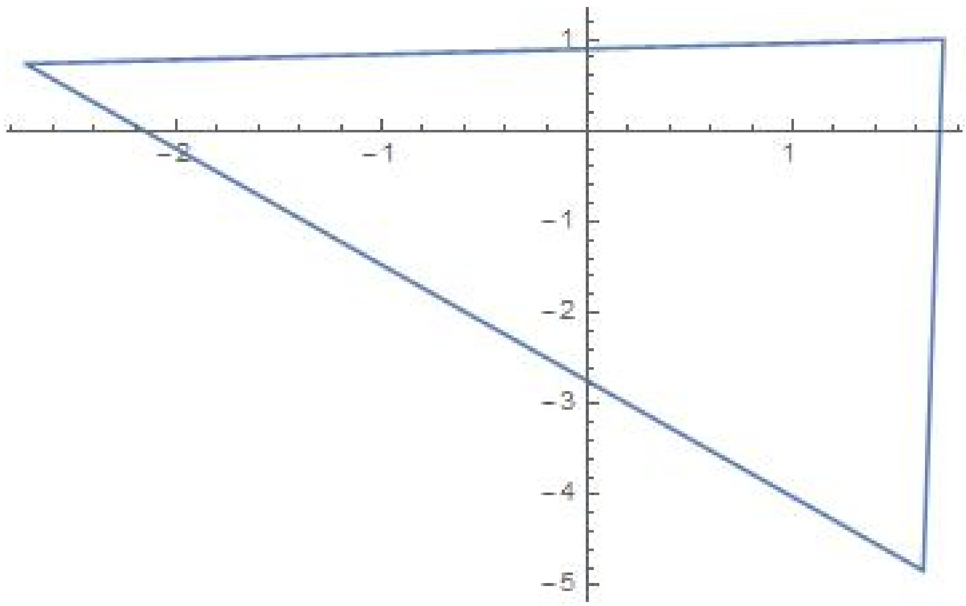

Figura 1: Triângulo rodado e refletido

Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Para determinar que 3 é um autovalor devemos resolver $(A - 3I)X = 0$, se tiver solução não nula, será autovalor. Resolvendo dá a solução $X_1 = \begin{bmatrix} 7r \\ r \\ 2r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Também resolvendo para 1, a equação $(A - I)X = 0$ obtemos a solução $X_2 = \begin{bmatrix} 3r \\ 3r \\ -2r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Assim 3 e 1 são autovalores e seus autovetores correspondentes não são o vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Então, para verificar se v é autovetor deve ser satisfeito $Av = \lambda v$, para algum λ. Então $Av = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix} = 9v$, portanto é autovetor para um autovalor igual a 9.

6. Diagonalize, se possível, a matriz A da forma quadrática $x^2 + 2xy - xz - 3y^2 - 2yx + yz - 2z^2 + 2z(x + y)$ (sem comutar os fatores).

Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para diagonalizar encontramos os autovalores e autovetores. Resolvendo a equação característica $det(A - \lambda I) = 0$ temos $-(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2 = 0$. Temos só dois candidatos a autovalores $\lambda_1 = -1$ (multiplicidade dois) e $\lambda_2 = -2$ (multiplicidade um).

Encontrando os autovetores de $\lambda_1 = -1$ temos $X = \begin{bmatrix} -r + \frac{1}{2}s \\ r \\ s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, (observar, se resolve por Gauss-Jordan, o sistema terá duas linhas de zeros). Logo temos dois autovetores para o autovalor $\lambda_1 = -1$, serão $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = -2$ temos $X = \begin{bmatrix} r \\ -r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, assim o autovetor é $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Montamos a matriz de autovetores $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e calculamos a inversa $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Logo: Como a matriz não pode ser simétrica utilizamos a diagonalização com inversa e não transposta:

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

7. Diagonalize, se possível, a matriz A da forma quadrática $-8x^2 - 5xy + xz + 8y^2 + 13yx - 2yz + z^2 - 5zx - 3zy$ (sem comutar os fatores).
Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para diagonalizar encontramos os autovalores e autovetores. Resolvendo a equação característica $det(A - \lambda I) = 0$ temos $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Temos dois candidatos a autovetores $\lambda_1 = 0$ (multiplicidade dois) $\lambda_2 = 1$.

Determinamos os autovetores para $\lambda_1 = 0$, obtemos $X = \begin{bmatrix} r \\ -\frac{3}{2}r \\ \frac{1}{2}r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Assim um autovetor será $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determinando o autovetor para $\lambda_2 = 1$, obtemos um autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Como temos apenas dois autovetores não podemos diagonalizar a matriz, pois o espaço é de três dimensões e a base de autovetores dará um espaço de dimensão dois.

8. Diagonalize, se possível, a matriz A da forma quadrática $3x^2 + 8xy + 9y^2$ (utilize a matriz simétrica). Também escreva a matriz de autovetores na forma ortonormal.
Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

A equação característica dá $\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$, então os candidatos a autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 11$. Os autovetores correspondentes são $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para diagonalizar com uma transposta verificamos se os vetores são ortogonais $v_1 \cdot v_2 = -2 + 2 = 0$, logo são ortogonais, portanto basta agora pegar os autovetores unitários, sendo

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Diagonalizando temos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

9. Diagonalize, se possível, a matriz A da forma quadrática $\frac{8}{3}z^2 + 4xy + 3y^2 + 2xz + 4yz$ (utilize a matriz simétrica). Também escreva a matriz de autovetores na forma ortonormal.
Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Para diagonalizar encontramos os autovalores e autovetores. Resolvendo a equação característica $det(A - \lambda I) = 0$ temos $(\lambda + 1)(-3\lambda^2 + 20\lambda - 17) = 0$. Temos três candidatos a autovetores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = \frac{17}{3}$.

Determinando os autovetores correspondentes temos $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$. Verificamos que são ortogonais (verifique). Logo basta utilizar os autovetores unitários para construir a matriz P ortogonal, então a diagonalização será

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}.$$

10. Encontre os autovalores de A^9, para $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

    Resolução:
    Autovalores de A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_4 = 0$.
    Autovetores de A: $v_1 = (53, \frac{28}{3}, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, 0)$, $v_3 = (-6, 1, 0, 0)$ e $v_4 = (11, -6, 1, 0)$.
    Observar que $A = PDP^{-1}$ e $A^9 = PD^9P^{-1}$. Os autovalores de A^9 são $\lambda_1 = 2^9 = 512$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{512}$ e $\lambda_4 = 0$.