ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 7 - Geometria em R^n. Transformações lineares e Matrizes.

1 de julho de 2020

Geometria em R^n:

1. Os vértices de um triângulo são os pontos A, B e C, onde: $\|BA\| = a$ e $\|AC\| = 2a$. Determine a equação da reta que contêm a bissetriz interior do triângulo no ângulo correspondente ao vértice A.
   Resolução: A reta que contêm a bissetriz é definida por $\mathcal{L}$: $Q = P_0 + ut$, onde $t\epsilon\mathbb{R}$. Como a bissetriz terá origem no vértice A, podemos adotá-lo como o ponto de passagem necessário para encontrar a equação. Assim para encontrarmos u precisamos de dois vetores de mesmo tamanho, que podemos usar AB e $\frac{1}{2}AC$. Ou seja, $u = AB + \frac{1}{2}AC$, que desenvolvendo temos $u = \frac{1}{2}(C - 2B - 3A)$. Portanto, $\mathcal{L}$: $Q = A + \frac{1}{2}(C - 2B - 3A)t$.

2. Desenvolvida em aula. Vide vídeo aula de retas.

3. Sejam $M = (1, 0, 0)$, $N = (2, 2, 2)$ e $R = (-1, 1, 3)$ os pontos médios dos lados de um triângulo, cuja área não é nula. Determine os vértices do triângulo.
   Resolução: Como temos os pontos médios dos lados do triângulo podemos estabelecer relações com os seus vértices: $\frac{A+B}{2} = N$, $\frac{A+C}{2} = M$ e $\frac{B+C}{2} = R$. Desenvolvendo, temos que $A+B = (4, 4, 4)$, $B = (-2, 2, 6) - C$ e $C = (2, 0, 0) - A$. Assim, desenvolvendo essas equações fazendo as devidas substituições, temos que $A = (4, 1, -1)$, $B = (0, 3, 5)$ e $C = (-2, -1, 1)$.

Transformação Linear e Matriz associada:

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y, z) = (x - y, x + 2y, z + x)$. Determine uma base para o núcleo da transformação T.
   Resolução: O núcleo da transformação está formado pelos (x, y, z) tal

que $T(x,y,z)=0$, isto é $(x-y, x+2y, z+x)=(0,0,0)$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

a única solução é o vetor $(x,y,z)=(0,0,0)$. Assim não existe conjunto não nulo que seja base do núcleo de T.

2. Determine a matriz associada a transformação T do exercício 1.
Resolução: Podemos escrever

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+2y \\ z+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A matriz associada será

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Seja a transformação linear $L: R^2 \to R^2$ para a qual temos $L(1,1)=(1,-2)$ e $L(-1,1)=(2,3)$.

   (a) Calcule $L(-1,5)$
   Resolução: Como temos a imagem de $(1,1)$ e de $(-1,1)$, expressamos o vetor $(-1,5)$ como combinação linear dos anteriormente mencionados: $(-1,5)=a(1,1)+b(-1,1)$. Daqui temos que $a=2$ e $b=3$. Aplicando agora a transformação:
   $T(-1,5)=T\left(2(1,1)+3(-1,1)\right)=2T(1,1)+3T(-1,1)=(8,5)$.

   (b) Calcule $L(a_1,a_2)$
   Resolução: De maneira similar: $(a_1,a_2)=a(1,1)+b(-1,1)$, onde $a=\frac{1}{2}\left(a_1+a_2\right)$ e $b=\frac{1}{2}\left(a_2-a_1\right)$. Logo
   $T(a_1,a_2)=T\left(\frac{1}{2}\left(a_1+a_2\right)(1,1)+\frac{1}{2}\left(a_2-a_1\right)(-1,1)\right)$
   $T(a_1,a_2)=\frac{1}{2}\left(a_1+a_2\right)T(1,1)+\frac{1}{2}\left(a_2-a_1\right)T(-1,1)$. Assim
   $T(a_1,a_2)=\frac{1}{2}\left(3a_2-a_1, a_2-5a_1\right)$.

4. Seja a transformação linear $L: P_1 \to P_1$ tal que $L(t+1)=2t+3$ e $L(t-1)=3t-2$.

   (a) Determine $L(6t-4)$.
   Resolução: Como temos a imagem de $t+1$ e de $t-1$, expressamos o vetor $6t-4$ como combinação linear dos anteriormente mencionados: $6t-4=\alpha(t+1)+\beta(t-1)$. Daqui temos que $\alpha=1$ e $\beta=5$. Aplicando agora a transformação:
   $T(6t-4)=T\left((t+1)+5(t-1)\right)=(2t+3)+5(3t-2)=17t-7$.

(b) Determine $L(at+b)$
Resolução: De maneira similar: $at+b=\alpha(t+1)+\beta(t-1)$, onde $\alpha=\frac{1}{2}(a+b)$ e $\beta=\frac{1}{2}(a-b)$. Logo
$T(at+b)=\frac{1}{2}(a+b)\,T(t+1)+\frac{1}{2}(a-b)\,T(t-1)$.
Assim $T(at+b)=\frac{1}{2}\left[(5a-b)t+(a+5b)\right]$.

5. Determine a matriz associada a transformação L do exercício 4.
Resolução: Considerando no conjunto de partida a base $\beta=\{(t+1),(t-1)\}$ e a base canônica no conjunto de chegada $\gamma=\{1,t\}$, observamos que $[L(\beta_1)]=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ e $[L(\beta_2)]=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$, logo a matriz é $[L]_{\gamma\beta}=\begin{bmatrix}3&-2\\2&3\end{bmatrix}$.

6. Seja a transformação linear $L:P_2\to P_2$ definida como $L(at^2+bt+c)=(a+c)t^2+(b+c)t$.

(a) t^2-t-1 pertence ao $Ker(L)$?
Resolução: Se pertence ao núcleo a imagem deve ser 0. Calculando $T(t^2-t-1)=0t^2-2t=-2t$ que não é o polinômio zero, então $\left(t^2-t-1\right)\notin Ker(T)$.

(b) t^2+t-1 pertence ao $Ker(L)$?
Resolução: Novamente, $L(t^2+t-1)=0t^2+0t=0$. Como a imagem é zero, o polinômio $\left(t^2+t-1\right)\in Ker(T)$.

(c) $2t^2-t$ pertence à $Img(L)$?
Resolução: Supondo que existe um polinômio at^2+bt+c, tal que $T\left(at^2+bt+c\right)=2t^2-t$. Então do sistema $a+c=2$ e $b+c=-1$ temos infinitas soluções, em particular fazendo $c=1$, então $b=-2$ e $a=1$. Logo $T(t^2-2t+1)=2t^2-t$, portanto pertence à imagem.

(d) t^2-t+2 pertence à $Img(L)$?
Resolução: Para t^2-t+2, temos $T\left(at^2+bt+c\right)=t^2-t+2$. Mas pela definição da transformação a imagem não tem termo constante, assim o polinômio não pertence ao conjunto imagem.

(e) Determine uma base para o $Ker(L)$.
Resolução: Calculando o núcleo, $T\left(at^2+bt+c\right)=0$, então $(a+c)t^2+(b+c)t=0$. Então do sistema $a+c=0$ e $b+c=0$, $a=-c$ e $b=-c$, portanto o polinômio do núcleo terá a forma
$-ct^2-ct+c=c\left(-t^2-t+1\right)$.
Uma base para o núcleo é $\beta=\{-t^2-t+1\}$.

(f) Determine uma base para a imagem de L, $Img(L)$.
Resolução: Toda imagem tem a forma
$(a+c)t^2+(b+c)t=at^2+bt+c(t^2+t)$.
Assim, as imagens são combinação linear dos polinômios $\left\{t^2,t,t^2+t\right\}$. Mas o terceiro elemento é combinação linear dos primeiros dois, e esses dois são linearmente independentes, então uma base para a imagem é $\left\{t^2,t,\right\}$.

7. Seja a transformação linear $L : M_{22} \to M_{22}$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base para o $Ker(L)$.
Resolução: Sabemos que o núcleo está formado pelas matrizes cuja imagem é o zero (matriz). Então

$$\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

o que fornece um sistema de equações $a+b=0$, $b+c=0$, $a+d=0$ e $b+d=0$, resolvendo temos: $a=c=d=-b$, então $a=0$, $b=0$, $c=0$ e $d=0$. Assim $Ker(L)=\{0\}$, portanto a base é o conjunto vazio.

(b) Determine uma base para a imagem de L, $Imag(L)$.
Resolução: A imagem pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Precisamos verificar se essas quatro matrizes são L.I., e conforme a parte (a) acima verifica-se que a única combinação linear do zero são coeficientes todos zero, então é um conjunto L.I. Logo uma base para imagem é

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

.