ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 2 - Gabarito

Para todo sistema de equações lineares utilizar o método de eliminação Gauss ou Gauss-Jordan.

1. Aplique a eliminação de Gauss para decompor a matriz A em uma matriz triangular inferior L e outra triangular superior U, tal que $A = LU$, (se possível):
   Resolução: Utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan podemos triangularizar (superior) a matriz A dada, zerando todas as entradas abaixo da diagonal. Assim tem-se a matriz U.
   Observar que os fatores utilizados nas operações elementares (com sinal trocado) formam as entradas da matriz L.
   A matriz L tem a característica de possuir 1 em cada entrada da diagonal e zeros acima dela.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
   Aplicando a eliminação de Gauss, zeramos a entrada a_{21}, multiplicando a primeira linha vezes (-3) e somando na segunda linha.
   Então $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Feito!, abaixo da diagonal (a única entrada) só tem entrada zero.
   Logo, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e montamos $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Então

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 2 \\ -2 & -8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{24}{5} & 2 \\ 0 & \frac{-34}{5} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{24}{5} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{6} \end{bmatrix}$.
   Então $U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{24}{5} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{6} \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{17}{12} & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Então $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$.

2. Utilize a decomposição LU da matriz A, para resolver as equações a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Escrevemos por simplicidade como $AX = F$.

Fazendo a decomposição $A = LU$, temos

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{17}{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{24}{5} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{6} \end{bmatrix}.$$

Logo temos que resolver $LUX = F$. Observar que criando uma nova matriz variável $UX = Y$ o sistema fica $LY = F$, que é um sistema triangular, fácil de resolver começando de cima para baixo.

Resolvendo $LY = F$, temos a solução $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{17}{4} \end{bmatrix}$.

Agora resolvemos $UX = Y$, obtendo X a solução do sistema, $X = \begin{bmatrix} \frac{31}{44} \\ -\frac{37}{44} \\ \frac{51}{22} \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Identicamente, fazendo a decomposição LU temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Resolvendo $LY = F$ temos $Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, resolvendo $UX = Y$ temos $X = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3. Sejam a e b coeficientes escalares. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 3y + z = b \\ 2x + ax + 3z = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema em função dos coeficientes a e b.

Resolvendo o sistema por eliminação, começando pela terceira coluna que já tem uma entrada com 1 e outra com zero:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & b \\ (2+a) & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & b \\ (a-1) & -9 & 0 & 1-3b \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} -5 & 0 & 1 & b \\ (a+17) & 0 & 0 & 1-3b \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Falta um pivô igual a 1 na segunda linha, mas como não temos o valor de a, não sabemos se a entrada $(a+17)$ é zero ou diferente de zero. Analisamos os dois casos por separado.

(a.1) Supondo que $a \neq -17$, logo existe $\frac{1}{a+17}$, então

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -5 & 0 & 1 & b \\ (a+17) & 0 & 0 & 1-3b \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & \frac{5+2b+ab}{a+17} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1-3b}{a+17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6b-2}{a+17} \end{array}\right].$$

Logo, para qualquer b e para $a \neq -17$, existe uma única solução, que toma a forma

$$X = \frac{1}{a+17}\begin{bmatrix} 1-3b \\ 6b-2 \\ 5+2b+ab \end{bmatrix}.$$

(a.2) Para o caso $a = -17$, não podemos multiplicar pela inversa pois ela não existe (entrada é zero, não tem inversa), substituindo o valor de a temos

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -5 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Daqui podemos identificar dois casos também:

(a.2.1) Se $1-3b = 0$, isto é $b = \frac{1}{3}$, temos na segunda linha uma verdade evidente: $0 = 0$, portanto existem infinitas soluções pois temos uma variável livre.

Fazendo $x = r \in \mathbb{R}$, as soluções tem a forma

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -2r \\ b+5r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ -2r \\ 5r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(a.2.2) Se $1-3b \neq 0$, isto é para $b \neq \frac{1}{3}$, da segunda linha temos $0 = 1-3b \neq 0$, FALSO, logo não existem soluções.

Em resumo:

Se $a \neq -17$ o sistema tem uma única solução.

Se $a = -17$ e $b = \frac{1}{3}$, o sistema tem infinitas soluções.

Se $a = -17$ e $b \neq \frac{1}{3}$, o sistema não tem solução.

(b) Decomponha a matriz dos coeficientes (A) com $a = 6$, na forma $A = LDU$.

A ideia no presente caso é decompor a matriz A com produto de uma matriz triangular inferior L (com todas as entradas 1 na diagonal), uma matriz D que contenha apenas não zeros na diagonal, e uma matriz triangular superior U com todas as entradas na sua diagonal iguais a 1.

Inicia-se decompondo a matriz A no formato $L\bar{U}$, onde $\bar{U}$ não tem diagonal de entradas 1. Assim

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix}.$$

Logo temos $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{5}{12} & 1 \end{bmatrix}$ e $\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix}$.

Extraindo da matriz $\bar{U}$ a matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix}$, perguntamos se é possível expressar

$$\bar{U} = DU.$$

Essa "nova" matriz U tem só unidades na diagonal. Se for possível, precissamos resolver:

$$\bar{U} = DU$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -24 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & -24 & -24u_{23} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix}$$

Resolvendo

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{24} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{5}{12} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{12} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{24} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU.$$

4. Responda verdadeiro ou falso, justificando. Considere matrizes quadradas em todos os casos.

   (a) Se $A^2 = -2A^4$, então $\left(I_n + A^2\right)\left(I_n - 2A^2\right) = I_n$.
   Verdadeiro. Desenvolvendo o produto
   $(I_n + A^2).(I_n - 2A^2) = I_n + A^2 - 2A^2 - 2A^4 = I_n - A^2 - 2A^4$.
   Utilizando a hipótese temos $(I_n + A^2).(I_n - 2A^2) = I_n - A^2 + A^2$.

   (b) Se $A = P^tDP$, onde D é uma matriz diagonal e P é uma matriz, então $A^t = A$.
   Verdadeiro. Calculamos a transposta de A temos $A^t = (P^tDP)^t = P^tD^tP^{t^t}$, onde foi utilizada a propriedade da transposta de um produto.
   Mas a transposta da transposta de uma matriz é a mesma matriz, assim $P^{t^t} = P$, e a transposta de uma

matriz diagonal é a mesma matriz diagonal, então

$$A^t = P^t D^t P^{t^t} = P^t DP = A.$$

(c) Se D é uma matriz diagonal, então $DA = AD$, para toda matriz A, $n \times n$.

Falso, pois, supondo uma matriz qualquer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e fazendo-se

$DA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$

Fazendo-se $AD = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$. Portanto, $A.D \neq D.A$.

(d) Se $B = AA^t$, então $B = B^t$.

Verdadeiro. Calcula-se $B^t = (AA^t)^t = A^{t^t} A^t = AA^t = B$.

(e) Se B e A são tais que $A = A^t$ e $B = B^t$ então $C = AB$, é tal que $C^t = C$.

Falso. Calcula-se $C^t = (AB)^t = B^t A^t$, utilizando as igualdades em que A e B são iguais a suas transpostas, temos $C^t = BA$.

Se $C^t = C$ teriamos que $BA = AB$, mas isto não é válido sempre, pois o produto de matrizes não é necessariamente comutativo.

Como contra exemplo temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, onde $AB = \begin{bmatrix} 22 & 25 \\ 62 & 66 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 22 & 62 \\ 25 & 66 \end{bmatrix}$, que não são iguais.

5. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3-2y & 2 & z-1 \\ z+3 & -1 & 2y \\ z-5 & 8 & x-2z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2x+1 & 2 & x+y \\ x+2 & -1 & z-2x \\ y-1 & b & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $A = B$, determine o valor de $x + y + z$, se possível. Se sim, qual o valor?. Se não, explique.

Se $A = B$ então $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e para todo j. Portanto temos o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3-2y = 2x+1 \\ z+3 = x+2 \\ z-5 = y-1 \\ 8 = b \\ z-1 = x+y \\ 2y = z-2x \\ x-2z = 1 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{c} 2x+2y = 2 \\ x-z = 1 \\ y-z = -4 \\ b = 8 \\ x+y-z = -1 \\ 2x+2y-z = 0 \\ x-2z = 1 \end{array} \right.$$

Temos um valor definido $b = 8$.

Falta determinar as outras três incógnitas e para elas temos seis equações (restrições).

Deve ser resolvido o sistemas de 6 equações com 3 incôgnitas. A matriz estendida é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos uma equação inconsistente $0 = 2$ (FALSO). Observar como existem duas equações consideram a verdade evidente $0 = 0$, mas como existe uma inconsistência o sistema não tem solução. Não é possível determinar um valor para $x + y + z$.

6. Determine uma equação que relacione a, b e c para que o sistema linear abaixo tenha solução para quaisquer valores de a, b e c que satisfazem essa equação.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = a \\ 5z + 3x - y = b \\ x + 2z - 3y = c \end{cases}.$$

Considerando a matriz extendida:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & a \\ 3 & -1 & 5 & b \\ 1 & -3 & 2 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & -4 & \frac{1}{2} & \frac{-3a+2b}{2} \\ 0 & -4 & \frac{1}{2} & \frac{-a+2c}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{a+2b}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3a-2b}{8} \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{bmatrix}.$$

Assim, existirá solução (infinitas soluções) só quando a equação $a - b + c = 0$ seja válida. Caso contrário não existirá solução.

7. Calcular as matrizes inversas (se possível) de

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right].$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 9 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

Escolhemos como pivô o $cos(\theta)$ da primeira linha e primeira coluna, portanto multiplicamos toda a primeira linha vezes $\left(\frac{1}{cos(\theta)}\right)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} cos\,(\theta) & -sen\,(\theta) & 1 & 0 \\ sen\,(\theta) & cos\,(\theta) & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} & \frac{1}{cos(\theta)} & 0 \\ sen\,(\theta) & cos\,(\theta) & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

multiplicando a primeira linha vezes $(-sen\,(\theta))$ e somando na segunda linha,

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg\,(\theta) & sec\,(\theta) & 0 \\ sen\,(\theta) & cos\,(\theta) & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg\,(\theta) & sec\,(\theta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{cos(\theta)} & -tg\,(\theta) & 1 \end{array}\right]$$

multiplicando a segunda linha vezes $cos(\theta)$ para obter o pivô na segunda linha e segunda coluna

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -tg\,(\theta) & sec\,(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & -sen\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -sen\,(\theta)\,tg\,(\theta) + sec\,(\theta) & cos\,(\theta)\,tg\,(\theta) \\ 0 & 1 & -sen\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)} + \frac{1}{cos(\theta)} & sen\,(\theta) \\ 0 & 1 & -sen\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & cos\,(\theta) & sen\,(\theta) \\ 0 & 1 & -sen\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} cos\,(\theta) & sen\,(\theta) \\ -sen\,(\theta) & cos\,(\theta) \end{bmatrix}.$$

(e) $\begin{bmatrix} cosh(x) & senoh(x) \\ senoh(x) & cosh(x) \end{bmatrix}$ lembrar as identidades $\begin{cases} cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ senoh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} cosh\,(x) & senoh\,(x) & 1 & 0 \\ senoh\,(x) & cosh\,(x) & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{senoh(x)}{cosh(x)} & \frac{1}{cosh(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{cosh(x)} & -\frac{senoh(x)}{cosh(x)} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & cosh(x) & -senoh(x) \\ 0 & 1 & -senoh(x) & cosh(x) \end{array}\right].$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} cosh(x) & -senoh(x) \\ -senoh(x) & cosh(x) \end{bmatrix}.$$

8. (Utilize o cálculo da matriz inversa) Considerando que as temperaturas não conhecidas nos pontos da Figura [1], são valores promédios dos valores próximos dela, determine as temperaturas T_1, T_2, T_3 e T_4.

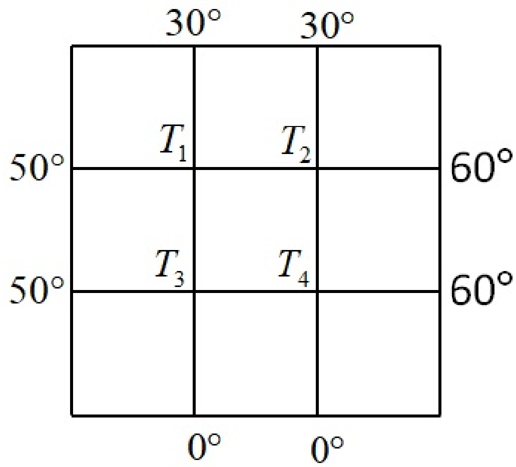

Figura 1: Temperaturas em uma placa quadrada. As temperaturas nos pontos da fronteira são conhecidas.

Resolução: Por ser promédio, para $T_1 = \frac{1}{4}(30 + 50 + T_3 + T_2)$ ou $4T_1 - T_2 - T_3 = 80$.
O sistema de equações, com os coeficientes já colocados na matriz é:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 80 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 90 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{75}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{65}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 37,5 \\ 40,0 \\ 30,0 \\ 32,5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T_1 = 37,5^o$; $T_2 = 40,0^o$; $T_3 = 30,0^o$; $T_4 = 32,5^o$.

9. Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a função (transformação) matricial definida por:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

(a) Determine x, y e z tais que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: Seria resolver o sistema $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 2 \\ -3 & -2 & -1 & | & 2 \\ -2 & 0 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & -2 & -10 & | & -4 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Determine também a matriz resultante de $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$.

$$f\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -14 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

10. (Resolva utilizando o cálculo da matriz inversa) Considere um processo industrial cuja matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de entrada para cada uma das seguintes matrizes resultantes:

(a) $\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Para resolver utilizamos $A.X = F \Rightarrow X = A^{-1}F$. Então encontramos a inversa de A,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(a) Agora utilizamos a inversa para resolver: $X = A^{-1}F$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{70}{3} \\ -20 \\ \frac{140}{3} \end{bmatrix}$$

(b) $X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

11. Determine coeficientes a, b e c da equação da circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que passa pelos pontos $P = (-2, -2)$, $Q = (-4, 1)$, $R = (1, 3)$.

Resolução

Substituindo as coordenadas do ponto $P = (-2, -2)$ na equação da circunferência temos a equação

$(-2)^2 + (-2)^2 + a(-2) + b(-2) + c = 0$

$4 + 4 - 2a - 2b + c = 0$, simplificando $2a + 2b - c = 8$.

Substituindo as coordenadas do ponto $Q = (-4, 1)$ na equação da circunferência temos a equação

$(-4)^2 + (1)^2 + a(-4) + b(1) + c = 0$

$16 + 1 - 4a + b + c = 0$, simplificando $4a - b - c = 17$.
Substituindo as coordenadas do ponto $R = (1, 3)$ na equação da circunferência temos a equação
$(1)^2 + (3)^2 + a(1) + b(3) + c = 0$
$1 + 9 + a + 3b + c = 0$, simplificando $a + 3b + c = -10$.
Assim, temos um sistema de equações cuja matriz estendida é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 8 \\ 4 & -1 & -1 & | & 17 \\ 1 & 3 & 1 & | & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{39}{19} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{31}{19} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{136}{19} \end{bmatrix}.$$

Daqui, temos os valores da solução:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 39 \\ -31 \\ -136 \end{bmatrix}$$

Portanto, a equação da circunferência toma a forma

$$x^2 + y^2 + \frac{39}{19}x - \frac{31}{19}y - \frac{136}{19} = 0$$

$$19x^2 + 19y^2 + 39x - 31y - 136 = 0.$$