ZAB 0161 - Álgebra Linear com aplicações em geometria analítica
Lista Resumo 1- Matrizes e Aplicações

1. Em um frigorífico foi analisada qual seria a combinação mais adequada de seus produtos para o consumidor referindo-se ao valor nutricional consumido em um certo tempo, assim, o avaliador concluiu que o cliente deveria consumir na primeira semana: 1 peça de carne bovina, 5 peças de carne suína e 3 peças de frango, no total de aproximadamente 16 quilogramas. Na segunda semana: 2 peças de carne bovina, 8 peças de carne suína e 7 peças de frango, totalizando 33 quilogramas consumidos. Na terceira e última semana ele consumiu 4 peças de carne bovina, 1 peça de carne suína e 1 de frango sendo consumidos 12 quilogramas no total.

   (a) Determine a quantidade de quilogramas de cada peça.

   (b) Qual a quantidade calórica de carne bovina ingeridas pelo consumidor na primeira semana? (Informações no quadro)

   (c) Qual a quantidade calórica de carne de frango ingeridas pelo consumidor na terceira semana? (Informações no quadro)

Quadro 1 - Valor energético das carnes

CARNES	ENERGIA
100 g Bovino	301 cal
100 g Suíno	242 cal
100 g Frango	239 cal

Resolução:
Determinando que:

$$\begin{cases} x \text{ peso(kg) da peça de carne bovina} \\ y \text{ peso(kg) da peça de carne suina} \\ z \text{ peso(kg) da peça de carne de frango} \end{cases}$$

Assim, O sistema de equações correspondente é

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 16 \\ 2x + 8y + 7z = 33 \\ 4x + y + z = 12 \end{cases}$$

A matriz estendida é

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 2 & 8 & 7 & 33 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -19 & -11 & -52 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{41}{2} & -\frac{123}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, (a) A peça de carne bovina tem 2 Kg, a peça de carne suina tem 1 Kg e a peça de carne de frango tem 3 Kg.

(b) Através de regra de três podemos obter os valores calóricos da carne bovina consumidos na primeira semana

$$\begin{array}{rc} 100g \rightarrow & 301cal \\ 2000g \rightarrow & X \end{array} \Rightarrow X = 6020cal/peça$$

(c) Através de regra de três podemos obter os valores calóricos da carne de frango na terceira semana

$$\begin{array}{rc} 100g \rightarrow & 239cal \\ 3000g \rightarrow & X \end{array} \Rightarrow X = 7170cal/peça$$

2. Determinada indústria utiliza três tipos de processos $P1$, $P2$ e $P3$, para produzir três tipos de refrigerantes, $R1$, $R2$ e $R3$. Para a produção de 1.000 unidades de $R1$ são necessários 1 hora de $P1$, 8 horas em $P2$ e 17 horas em $P3$. Para produzir 1.000 unidades de $R2$ são necessários exatamente 2 horas em $P1$, 4 horas em $P2$ e 5 horas em $P3$. Porém o processo $P1$ é o único que produz o produto $R3$, processando 1000 unidades em 1 hora. Qual a quantidade de unidades são processadas por $P1$, $P2$ e $P3$, sabendo que a máquina processa no máximo $P1$ em 12 horas, $P2$ em 24 horas e $P3$ em 37 horas?
Resolução:

Representando as quantidades: $\begin{cases} x \text{ unidades deR1} \\ y \text{ unidades de R2} \\ z \text{ unidades de R3} \end{cases}$, monta-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{1000}x + \frac{2}{1000}y + \frac{1}{1000}z = 12 \\ \frac{8}{1000}x + \frac{4}{1000}y + 0z = 24 \\ \frac{17}{1000}x + \frac{5}{1000}y + 0z = 37 \end{cases}$$

Multiplicando as linhas do sistema por 1.000, obtemos a matriz estendida:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 8 & 4 & 0 & 24000 \\ 17 & 5 & 0 & 37000 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & -12 & -8 & -72000 \\ 17 & 5 & 0 & 37000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & -12 & -8 & -72000 \\ 0 & -29 & -17 & -167000 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 6000 \\ 0 & -29 & -17 & -167000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 6000 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & 7000 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 12000 \\ 0 & 1 & 0 & 4000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 9000 \\ 0 & 1 & 0 & 4000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 4000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right]$$

$$N = \begin{bmatrix} 1000 \\ 4000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

Portanto, são produzidos 1000 unidades de R1, 4000 unidades de R2 e 3000 unidades de R3.

3. A criptografia tem como objetivo principal, transmitir uma mensagem a um destinatário sem que outra pessoa com a devida permissão consiga descobrir o conteúdo codificado. Essa preocupação está presente nas empresas, em especial nas alimentícias, com a finalidade da segurança e na privacidade de suas fórmulas e projetos.

   Considere uma empresa que pretende transmitir uma fórmula através do sistema computacional, ela deseja codificar a mensagem: "FORMULACAO#QUIMICA".

   (a) Construa sua matriz de mensagem M utilizando a tabela. (Considere que o tamanho da linha é igual da matriz codificadora)

   (b) Determine qual é a matriz da mensagem codificada.

   (c) Determine a matriz inversa A^{-1} que é a matriz de decodificação da mensagem, essa será a matriz que o receptor terá que decobrir para conseguir ler a mensagem.

Tabela de correspondência entre números e letras do alfabeto.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z	.	,	#	-
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Matriz Codificadora :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Resolução:

(a) Construindo a frase conforme a tabela, temos:

F O R M U L A C A O # Q U I M I C A

6 15 18 13 21 12 1 3 1 15 29 17 21 9 13 9 3 1

Fazendo a correspondência da mensagem convertendo-a em números, obtemos a matriz M:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 18 & 13 & 21 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 15 & 29 & 17 \\ 21 & 9 & 13 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que o número de linhas da matriz M, tem que ser igual o tamanho de colunas da matriz A, para a multiplicação posterior.

(b) Para a codificação da mensagem, multiplicamos a matriz M à esquerda pela matriz codificadora A. Em que Né a mensagem codificada.

$$N = AM = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 & 15 & 18 & 13 & 21 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 15 & 29 & 17 \\ 21 & 9 & 13 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 71 & 48 & 59 & 70 & 88 & 49 \\ 80 & 72 & 80 & 128 & 196 & 112 \\ 174 & 87 & 122 & 85 & 45 & 20 \end{bmatrix}$$

(c) Para decodificar a mensagem, basta achar A^{-1} e multiplicar pela matriz da mensagem N, dessa forma voltará a matriz inicial.

$$A^{^{-1}} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 71 & 48 & 59 & 70 & 88 & 49 \\ 80 & 72 & 80 & 128 & 196 & 112 \\ 174 & 87 & 122 & 85 & 45 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}AM = IM = M = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 18 & 13 & 21 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 15 & 29 & 17 \\ 21 & 9 & 13 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. O planejamento estratégico das atividades de produção é necessário para ter um controle mais eficiente, suponha que uma empresa do setor primário fabrica alimentos perecíveis, considerando que a quantidade de unidades produzidas por cada máquina têm que ser constantes e cada máquina produz 3 tipos diferentes de macarrão, tem-se:

   - A máquina 1 produz, 4 unidades tipo I, 1 unidade do tipo III e 1 unidade do tipo II. Sabe-se que essa máquina produz 720 unidades por minuto.
   - A máquina 2 produz, 3 unidades do tipo III, 2 unidades do tipo II e 5 unidades do tipo I. Sabe-se que essa máquina produz 1.620 unidades por minuto.
   - A máquina 3 produz, 3 unidades do tipo II, 2 unidades do tipo III e 6 unidades do tipo I. Sabe-se que a máquina 3 produz 1.440 unidades por minuto.

   Um método muito utilizado pelos computadores nas resoluções de matrizes, é a decomposição da matriz principal em LU. Utilize esse método para responder:

(a) Quanto tempo é necessário para produzir cada tipo de macarrão, nessa produção das máquinas?

(b) Porém houve problema nas máquinas, determine qual será o tempo de produção, sabendo que a máquina 1 produziu 180 unidades, a máquina 2 produziu 405 unidades e a máquina 3 produziu 360 unidades no total? (considere que a quantidade de unidades produzidas são constantes, ou seja, a matriz dos coeficientes são imutáveis)

(c) Para quanto decaiu o rendimento da produção, considerando que a produção com 100% de rendimento foi antes do problema nas máquinas?
Resolução:

$$\begin{cases} x : tempo\, de\, processamento\, Tipo\, I \\ y : tempo\, de\, processamento\, Tipo\, II \\ z : tempo\, de\, processamento\, Tipo\, III \end{cases}$$

Aplique a eliminação de Gauss para decompor a matriz A em uma matriz triangular inferior L e outra superior U, tal que $A = LU$, (se possível):
Utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan podemos triangularizar (superior) a matriz A dada, zerando todas as entradas abaixo da diagonal. Assim tem-se a matriz U.
Observar que os fatores utilizados nas operações elementares (com o sinal trocado) formam as entradas da matriz L. A matriz L tem a característica de possuir 1 em cada entrada da diagonal e zeros acima dela.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 720 \\ 1620 \\ 1440 \end{bmatrix}$. Escrevemos por simplicidade $AX = b$

- Fazendo a decomposição de $A = LU$ temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- Logo temos que resolver $LUX = b$. Observar que criando uma nova matriz variável $UX = Y$ o sistema fica $LY = b$, que é um sistema triangular, fácil de resolver começando de cima para baixo. Resolvendo $LY = b$, temos a solução:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 720 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 & 1620 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & 1440 \end{array}\right] \qquad Y = \begin{bmatrix} 720 \\ 720 \\ -1080 \end{bmatrix}$$

- Agora resolvemos $UX = Y$, obtendo X a solução do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 1 & 720 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 720 \\ 0 & 0 & -3 & -1080 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \\ 360 \end{bmatrix}$$

Portanto as máquinas possuirão um tempo de processsamento de 60 minutos para o macarrão tipo I, 120 minutos o tipo II e 360 minutos o tipo III.

(b) Após os problemas nas máquinas, calcula-se a quantos minutos as máquinas I, II e III demoraram para produzir as quantidades de 180, 405 e 360 unidades respectivamente. Para resolver, podemos utilizar a mesma matriz $A = LU$, pois a matriz de coeficientes são constantes.

Resolvendo :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 180 \\ \frac{5}{4} & 1 & 0 & 405 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & 360 \end{array}\right] \qquad Y = \begin{bmatrix} 180 \\ 180 \\ -270 \end{bmatrix}$$

- Agora resolvemos $UX = Y$, obtendo X a solução do sistema.

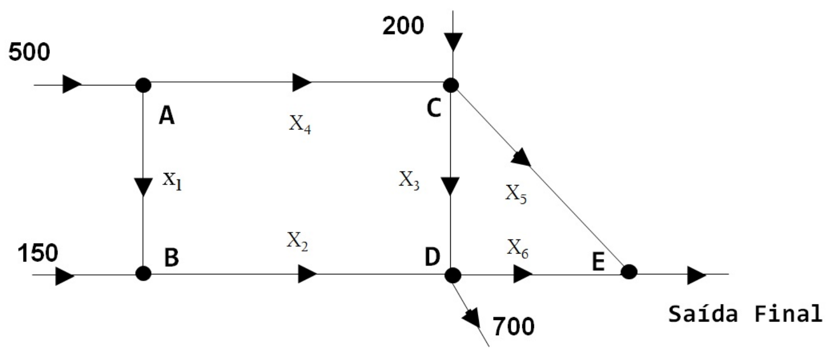
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 180 \\ 0 & 0 & -3 & -270 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Portanto as máquinas possuirão o tempo de processsamento de 15 minutos para o macarrão do tipo I, 30 minutos o tipo II e 90 minutos o tipo III, após os problemas das máquinas.

(c) Como ela produzia com 100% da sua capacidade no tempo de 60, 120 e 360 minutos, e passou a produzir em 15,30 e 90 minutos, ou seja, as máquinas estão operando com 25% de rendimento.

5. A figura 1 dada mostra a taxa de fluxo de um sistema produtivo de um produto. Para obter uma melhor gestão da produção, os engenheiros pretenderam medir qual seria o fluxo final da produção, o diagrama indica o número médio de insulmos que entra e os produtos que sai do sistema medidos em unidades por hora ao longo da esteira de produção. Todo o complexo possui um fluxo de sentido único.

Figure 1: Fluxo de Produção



(a) Quantos produtos deveria sair da produção, garantindo que os insumos que entra no complexo seja igual ao número médio de produtos que sai do complexo?

(b) Supondo que deseja fazer um controle da saída final para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo produtivo, o que pode ser discutido sobre o número médio de produtos que circundarão as esteiras, sabendo que na esteira x_4 passará somente 50 unidades? (Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.)

Resolução:

(a) Se y for igual ao número de produtos que passa pela saída final, então o número total de produtos que entra e sai do complexo produtivo será:

- Para dentro: $500 + 150 + 200 = 850$
- Para fora: $y + 700$

Igualando os fluxos para fora e para dentro, têm-se que a quantidade da saída dos produtos é igual a 150 unidades por hora.

(b) Para evitar um cogestionamento das esteiras, o fluxo para dentro de cada cruzamento de esteira deve ser igual o fluxo para fora (considerando os as qauntidades de produtos nos fluxos como variáveis). Dessa forma, as condições a seguir devem estar satisfeitas.

Montando o sistema observando os fluxos que chegam e que saem em cada nó. Considerando $y = 150$ que é a quantidade de saída dos produtos no processo.

Cruzamento	Fluxo para dentro		Fluxo para fora
A	500	=	x_1+x_4
B	x_1+150	=	x_2
C	x_4+200	=	x_3+x_5
D	x_2+x_3	=	x_6+700
E	x_5+x_6	=	150

Isolando os números de um lado da igualdade e as incógnitas de outra, como também, considerando que $x_4 = 50$, obterá:

$A : x_1 = 450$

$B : x_2 - x_1 = 150$

$C : x_3 + x_5 = 250$

$D : x_2 + x_3 - x_6 = 700$

$E : x_5 + x_6 = 150$

Montando a matriz estendida (lembrando que depois assumido um valor para x_4 teremos somente 5 incógnitas):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 150 \\ 250 \\ 700 \\ 150 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 450 \\ 600 \\ 100 + x_6 \\ 150 - x_6 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Como o sistema tem infinitas soluções, consideramos $x_6 = r$. Teremos:

$x_1 = 450, \qquad x_2 = 600, \qquad x_3 = 100 + r, \qquad x_5 = 150 - r, \qquad x_6 = r$

Contudo, o parâmetro r não será completamente arbitrário, pois há restrições físicas a considerar. Como as taxas de fluxo média não devem ser negativas, pois como dito no enunciado, o fluxo das esteiras são únicas, portanto uma taxa de fluxo negativo indicaria um fluxo na contramão, assim, conclui-se que o parâmetro deve satisfazer a condição de $0 \leq r \leq 150$, consequentemente a taxa de fluxo média ao longo das esteiras ficará dentro das cotas;

$x_1 = 450, \qquad x_2 = 600, \qquad 100 \leq x_3 \leq 250, \qquad 0 \leq x_5 \leq 150, \qquad 0 \leq x_6 \leq 150$

6. O fabricante de pães congelados se encontrou preocupado com o aumento da farinha de trigo e averiguou como afetou este acontecimento na venda do trimestre passado dos pães de três tipos diferentes: pão francês, baguete e pão integral. Logo depois de um estudo, encontrou a seguinte situação:

   - No primeiro mês não houve aumento da farinha, assim, os preços das unidades dos pães francês, baguete e integral foi de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 4,00 respectivamente.
   - No segundo mês houve um pequeno percentual de aumento da farinha, ele alterou o preço da unidade dos pães ficando, o pão francês a R$ 2,00, o integral a R$ 6,00 e o tipo baguete a R$ 4,00.
   - E no terceiro mês a farinha teve seu preço mais caro, como consequência, o fabricante não vendeu pão francês nesse mês, porém ele vendeu o integral por R$ 14,00 e o baguete por R$ 6,00.
   - Considere que o valor final da venda dos meses I, II, III, são dadas pelo parâmetro a, b e c respectivamente.

   (a) Monte um sistema de equações e transfira para a matriz estendida.

   (b) Discuta as quantidades vendidas em função dos parâmetros.
   Resolução:

   Quantidades (unidades):

   (a) $\begin{cases} x = Pão\, Francês \\ y = Pão\, Baguete \\ z = Pão\, Integral \end{cases}$

   Montando o sistema de equações:
   Primeiro Mês:$1x + 2y + 4z = a$
   Segundo Mês:$2x + 4y + 6z = b$
   Terceiro Mês: $0x + 6y + 14z = c$

   (b) Resolvendo a matriz estendida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 2 & 4 & 6 & b \\ 0 & 6 & 14 & c \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & -2 & -2a+b \\ 0 & 6 & 14 & c \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 6 & 14 & c \\ 0 & 0 & -2 & -2a+b \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+2a}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7b-14a+c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+2a}{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3a+2b \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7b-14a+c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+2a}{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5a-b-c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7b-14a+c}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+2a}{2} \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5a-b-c}{3} \\ \frac{7b-14a+c}{6} \\ \frac{-b+2a}{2} \end{bmatrix}$$

   Conclusão: Os parâmetros a, b, c será para todos os $\mathbb{R}$, e sempre haverá solução para as quantidades, porém tem a restrição das quantidades serem positivas. Portanto os parâmetros são restritos e dependentes.

7. Para a inoculação de microorganismos utiliza-se uma estufa com temperatura constante, ou seja, necessita-se que sua temperatura estabilize. Sabendo que as seguintes matrizes representam respectivamente a temperatura de 35ºC e 58ºC, encontre seu estado de equilíbrio.

   (a) $\begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

   Resolução:

(a) Resolvendo o sistema $T.X = X$, obtemos

$$(T-I).X = 0 \sim \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} -0,7 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0 \end{array}\right]$$

lembrando que o estado estacionário possui a propriedade de que a soma das entradas é 1, incrementar a equação $x+y+z=1$ no sistema0,5.

$$\begin{bmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & -0,6 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando Gauss-Jordan obtemos

$$\begin{bmatrix} -0,7 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0,2 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,2 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,7 & 0,1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0,8 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,7 & 0,1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0,8 & -0,2 & -0,2 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ -0,7 & 0,1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0,8 & -0,2 & -0,2 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0,8 & 1,2 & 0,7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0,8 & 1,2 & 0,7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,375 \\ 0 & 1 & 0 & 0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo a solução geral para a estabilização da temperatura de 35 $^{\text{o}}$C:

$$X = \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,125 \\ 0,500 \end{bmatrix}$$

(b) Resolvendo o sistema $T.X = X$, obtemos

$$(T-I).X = 0 \sim \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

incrementar a equação $x + y + z = 1$ no sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando Gauss-Jordan obtemos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{13}{12} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{13}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{13}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-11}{12} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo a solução geral para a estabilização da temperatura de 35 ºC:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8. Uma empresa de panificação fabrica três tipos diferentes de massas: pão francês, integral e croissant. Cada forma de pão francês precisa de 30 minutos de descanso na geladeira e 30 de cozimento. Cada forma de pão integral precisa de 20 minutos de descanso na geladeira e 30 para cozimento. Cada forma de croissant precisa de 10 minutos de descanso na geladeira e 20 de cozimento. Se uma geladeira está disponível por 10 horas diárias e um forno por 11 horas, quantas massas de cada tipo podem ser elaborados por dia, de maneira a aproveitar cada geladeira e cada forno em toda sua capacidade?
Resolução:
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Formas de pão francês por dia} \\ \text{Formas de pão integral por dia} \\ \text{Formas de croissant por dia} \end{bmatrix}.$$
Então monta-se o sistema de equações: $\begin{cases} 30x + 20y + 10z = 600 \\ 30x + 30y + 20z = 660 \end{cases}$, onde a primeira equação se refere tempo de descanso em uma geladeira e a segunda equação se refere ao tempo de cozimento em um forno, ambos em minutos. Montando a matriz estendida e resolvendo através de Gauss-Jordan temos:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 30 & 20 & 10 & 600 \\ 30 & 30 & 20 & 660 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$
Logo, o número de formas de pão frances depende da quantidade de formas de croissant e o número de formas de pão integral depende do numero de formas de croissant. Como tanto as formas de pão francês (x)quanto as formas de pão integral (y) depende das formas de Croissant (z), considera-se a quantidade de formas de Croissant como n, sendo assim:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 + \frac{1}{3}n \\ 6 - n \\ n \end{bmatrix}$$
Portanto, a matriz solução do problema é:
$$X = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Como o número de formas deve ser um número inteiro o valor de $n$deve ser múltiplo de 3. Os possíveis valores de $n = 0, 3, 6$, somente, pois também não podem ser negativos.

9. Na fabricação de polpa de laranja e acerola, é importante estimar as quantidades de vitaminas que serão fornecidos ao cliente, visto que, depende de alguns processos essas quantidades podem ser alteradas no produto final. Dessa forma, considere que para fabricar $100g$ de polpa de laranja, essa possui 2% de vitamina A e 18% de vitamina C, a polpa de acerola tem 3% de vitamina A e 20% de vitamina C. Entretanto, no processo de empacotar o suco da laranja e o suco de acerola é incrementado 1% de vitamina A e a vitamina C não tem acréscimos. No processo de congelamento, o suco de laranja perde 1% de sua vitamina C e na acerola não se altera essa vitamina, e a vitamina A não se perde no congelamento das polpas.

   (a) Considere que m refere-se a quantidade dos produtos, e n a quantidade de vezes que esses alimentos passam pelo processo empacotar/congelar, assim, qual a relação necessária para que ambos os processos NÃO tenha uma solução.
   Resolução:

Montando as matrizes:

- Primeiro montar a matriz de proporção de vitaminas que contém as polpas.

$$T = \begin{array}{c} \\ Laranja \\ Acerola \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Depois montar a matriz de processamento, empacotar/congelar, essa refere-se a proporção de vitaminas também:

$$\begin{cases} E = \text{Empacotar} \\ W = \text{Congelar} \end{cases}$$

$$T = \begin{array}{c} \\ Laranja \\ Acerola \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Como deseja-se estimar as quantidades de cada vitamina em cada alimento então deve-se somar as duas matrizes, porém o enunciado diz as quantidades m e n que multiplica essas matrizes.

$$K = \begin{bmatrix} 2m & 18m \\ 3m & 20m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = mT + nB = \begin{bmatrix} 2m+n & 18m-n \\ 3m+n & 20m \end{bmatrix}$$

.

- Para que os processos não tenha solução, a matriz K não deve possuir inversa, ou seja, seu determinate deve ser nulo.
- Seu determinante é $det(K) = 20m(2m+n) - (3m+n)(18m-n) = 0$.

Desenvolvendo a expressão temos: $-14m^2 + 5mn + n^2 = 0$.

Resolvendo para m a equação quadrática temos $m = \frac{-5n \pm \sqrt{81n^2}}{(-28)}$, simplificando temos dois valores $m = -\frac{1}{7}$ e $m = \frac{n}{2}$.

Como a solução não pode ser negativo, é a segunda que pode ser representada por $2m - n = 0$.

Conclusão: Para não conseguir fabricar as polpas tem que levar em consideração a relação $m = \frac{n}{2}$ que a quantidade dos produtos é igual a metade de vezes que passa pelo processo empacotar/congelar.

10. (PARA RELAXAR - A SOLUÇÃO DEVE SER UM NÚMERO INTEIRO) Numa granja há patos, marrecos e galinhas num total de 50 aves. Os patos são vendidos a R\$ 12,00 a unidade, as galinhas a R\$ 5,00 e os marrecos a R\$ 15,00. Considere um comerciante que tenha gastado R\$ 440,00 na compra de aves desses três tipos e que tenha comprado mais patos do que marrecos. Qual o número de patos comprados pelo comerciante.
Resolução:
Representamos por x o número de patos, y o número de galinhas e z o número de marrecos, temos o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 12x + 5y + 15z = 440 \end{cases}$$

Resolvendo por Gauss Jordan temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 12 & 5 & 15 & 440 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{190}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{160}{7} \end{array}\right]$$

que dá infinitas soluções, então deveremos analisar o resultado. Assume-se que z pode tomar qualquer valor, então o número de patos é $x = \frac{190}{7} - \frac{10}{7}z = \frac{10}{7}(19 - z)$. Como x e z não podem ser negativos então $0 \leq z \leq 19$, além disso o termo $19 - z$ deve ser múltiplo de 7, pois o número de patos deve ser inteiro. Assim temos duas alternativas: $19 - z = 14$ ou $19 - z = 7$, logo $z = 5$ ou $z = 12$. Se $z = 12$ então $z = \frac{10}{7}(7) = 10$, o que não é válido pois o número de patos deve ser maior ao número de marrecos. Portanto a única solução é $z = 5$ e $x = \frac{10}{7}(14) = 20$.