Aula passada: $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{Y}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}}_{Y_0}$ $\quad b \neq 0.$

$Y(t) = e^{tA} Y_0$

Vamos calcular e^{tA} diagonalizando A.

Receita:

1) $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ b & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - a)^2 + b^2$

2) Raízes de p_A: $\quad (\lambda - a)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - a)^2 = -b^2 \Leftrightarrow \lambda_\pm = a \pm ib.$

3) Vamos resolver $AX = \lambda_\pm X.$

$\lambda_+ = a + ib \qquad (A - \lambda_+ I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - (a+ib) & b \\ -b & a - (a+ib) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -ib & b \\ -b & -ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -ibx + by = 0 \\ \cancel{-bx - iby = 0} \end{matrix}$ $i \times 1^a$

$\Leftrightarrow -ibx + by = 0 \Leftrightarrow -ix + y = 0 \Leftrightarrow y = ix$

$\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad X_+ = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_+ = a + ib$

$\lambda_- = a - ib \quad (A - \lambda_- I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - (a-ib) & b \\ -b & a - (a-ib) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ib & b \\ -b & ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} +ibx + by = 0 \\ \cancel{-bx + iby = 0} \end{matrix}$ $i \times 1^a$

$\Leftrightarrow +ix + y = 0 \Leftrightarrow y = -ix$

$\begin{pmatrix} i \\ \end{pmatrix}$

4) $$P = \begin{array}{cc} a-ib & a+ib \\ \end{array}$$
$$P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

LOGO $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$

CONFERINDO

$$P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & +b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ia+b & -ia+b \\ -ib+a & ib+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow PtDP^{-1} = tA \Rightarrow \exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} e^{t(a-ib)} & 0 \\ 0 & e^{t(a+ib)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2i} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2i}e^{t(a-ib)} & \frac{1}{2}e^{t(a-ib)} \\ -\frac{1}{2i}e^{t(a+ib)} & \frac{1}{2}e^{t(a+ib)} \end{pmatrix} = e^{ta}\begin{pmatrix} \overset{\cos}{\frac{1}{2}(e^{-ibt}+e^{ibt})} & \overset{\text{sen}}{\frac{1}{2i}(e^{ibt}-e^{-ibt})} \\ \underset{=-\text{sen}}{-\frac{1}{2i}(e^{ibt}-e^{-ibt})} & \underset{=\cos}{\frac{1}{2}(e^{ibt}+e^{-ibt})} \end{pmatrix}$$

RECORDAÇÃO: FÓRMULA DE EULER $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\exp(tA) = e^{ta}\begin{pmatrix} \cos(bt) & \text{sen}(bt) \\ -\text{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

SOLUÇÃO FINAL $\quad Y(t) = e^{tA} Y_0 = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^{at}\left(\cos(bt)\bar{y}_1 + \sin(bt)\bar{y}_2\right) \\ e^{at}\left(-\sin(bt)\bar{y}_1 + \cos(bt)\bar{y}_2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 2x2.

QUESTÃO: QUALITATIVAMENTE COMO PODEM SER AS SOLUÇÕES DO PROBLEMA

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

PARA ISTO QUEREMOS ACHAR MATRIZES "SIMPLES" B T.Q. $P^{-1}AP = B$.

VAMOS CLASSIFICAR MATRIZES 2x2 VIA TEO. DE JORDAN

LEMA 1 (CAYLEY): SEJA $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ E p_A O POLINÔMIO CARACTERÍSTICO $(p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A))$. LOGO $p_A(A) = 0$.

$(\text{SE } p_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \Rightarrow A^2 + \alpha A + \beta I = 0)$

DEMO: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

QUEREMOS PROVAR $\quad A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0.$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(ad-bc)I = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

LEMA 2: $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (REAL). SE $\lambda_+ = a+ib$, $b \neq 0$, É AUTOVALOR, ENTÃO $\lambda_- = a-ib$ TAMBÉM É AUTOVALOR. ALÉM DISSO, SE $w \in \mathbb{C}^2$, $w \neq 0$, FOR DA FORMA $w = u+iv$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, E $Aw = \lambda_+ w$, ENTÃO $\{u, v\}$ É LINEARMENTE INDEPENDENTE E $\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases}$

DEMO: 1) COMO A É MATRIZ REAL, ENTÃO $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

SE λ_+ É T.Q. $p(\lambda_+) = 0$, ENTÃO $\lambda_+^2 + \alpha\lambda_+ + \beta = 0$. TOMANDO O COMPLEXO CONJUGADO, TEMOS $\bar{\lambda}_+^2 + \underset{\alpha}{\underset{\parallel}{\bar{\alpha}}}\,\bar{\lambda}_+ + \underset{\beta}{\underset{\parallel}{\bar{\beta}}} = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_+^2 + \alpha\bar{\lambda}_+ + \beta = 0$.

$\Rightarrow p(\bar{\lambda}_+) = 0$. COMO $\bar{\lambda}_+ = \lambda_-$, CONCLUÍMOS QUE λ_- É AUTOVALOR.

2) SE $w \neq 0$, $w = \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\uparrow}{u}} + i\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\uparrow}{v}}$ E $Aw = (a+ib)w$. LOGO $\{u, v\}$ SÃO L.I.

$$Aw = \lambda_+ w$$

SE $\{u, v\}$ NÃO SÃO L.I., ENTÃO $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ T.Q $v = \alpha u$.

LOGO $w - \bar{w} = u + iv - (u - iv) = 2iv \underset{v=\alpha u}{=} 2i\alpha u$

$w + \bar{w} = u + iv + (u - iv) = 2u$

ASSIM, $(w - \bar{w}) = 2i\alpha\,(w + \bar{w})$

$(1 - 2i\alpha) w = (1 + 2i\alpha)\bar{w}$.

VAMOS APLICAR $(A - \lambda_+ I)$

$(1 - 2i\alpha)\underbrace{(A - \lambda_+ I) w}_{} = (1 + 2i\alpha)(A - \lambda_+ I)\bar{w}$

$Aw - \lambda_+ w = 0$

$Aw = \lambda_+ w$

$(1 + 2i\alpha)(A - \lambda_+ I)\bar{w} = 0$.

$\underbrace{(1 + 2i\alpha)}_{\neq 0}\underbrace{(\lambda_- - \lambda_+)}_{\neq 0}\bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{w} = 0$

$\Downarrow$

MAS $Aw = \lambda_+ w \underset{\text{TOMANDO COMPLEXO CONJUGADO}}{\Rightarrow} A\bar{w} = \bar{\lambda}_+ \bar{w} \Rightarrow A\bar{w} = \lambda_- w$.

$w = 0$

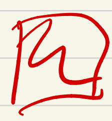
ABSURDO

3) $Aw = (a + ib) w \Rightarrow A(u + iv) = (a + ib)(u + iv)$

$\boxed{Au} + \boxed{iAv} = \boxed{(au - bv)} + \boxed{i(bu + av)}$

$\Rightarrow Au = au - bv$

$Av = bu + av$



Teorema (Forma Canônica Real de Jordan 2×2)

Seja A uma matriz real 2×2, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Logo ocorre uma e somente uma das opções abaixo:

(1) $\exists$ dois autovalores reais distintos de A. Neste caso, $\exists\, P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversível t.q. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

(2) $\exists$ apenas um autovalor real. λ_0

a) Se $\dim N(\lambda_0 I - A) = 2$, $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

b) Se $\dim \underbrace{N(\lambda_0 I - A)}_{\{X \in \mathbb{R}^2,\ AX = \lambda_0 X\}} = 1$, então $\exists\, P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversível t.q.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

(3) $\exists$ dois autovales complexos $\lambda_+ = a + ib$, $\lambda_- = a - ib$, $b \neq 0$. Neste caso $\exists\, P \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversível t.q. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Demo: (1) $\exists$ dois autovalores reais distintos. Logo $\exists$ $X_1 \neq 0$ e $X_2 \neq 0$ t.q. $AX_1 = \lambda_1 X_1$ e $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

BASTA AGORA PROVAR QUE X_1 E X_2 SÃO L.I.

SE NÃO FOREM, TEMOS $\alpha \neq 0$ T.Q. $X_1 = \alpha X_2$.

LOGO $$(\lambda_1 - A)\alpha X_1 = (\lambda_1 - A)\alpha X_2$$

$$\underbrace{\alpha\lambda_1 X_1 - \alpha\lambda_1 X_1}_{=0} = \underbrace{\lambda_1\alpha X_2 - \alpha\lambda_2 X_2}_{\underbrace{\alpha}_{\neq 0}\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}X_2} \Rightarrow X_2 = 0 \text{ ABSURDO.}$$

COMO TEMOS 2 AUTOVETORES L.I., ENTÃO $\exists$ BASE DE AUTOVETORES L.I.

PORTANTO A É DIAGONALIZÁVEL.

$$\left(P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$$

2. a) $\dim N(\lambda_0 - A) = 2$.

$N(\lambda_0 I - A) \subset \mathbb{R}^2$ É SUBESPAÇO $\dim N(\lambda_0 I - A) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

LOGO $N(\lambda_0 I - A) = \mathbb{R}^2$. (POIS AS DIMENSÕES SÃO IGUAIS)

ASSIM, $\forall X \in \mathbb{R}^2$, TEMOS QUE $X \in N(\lambda_0 I - A)$ E, PORTANTO,

$$AX = \lambda_0 X, \ \forall X \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I.$$

2b) $\dim N(\lambda_0 I - A) = 1.$

RECORDAÇÃO: $T: V \to W \quad \dim V = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$

EM PARTICULAR $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad 2 = \dim N(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$

USANDO ESTE RESULTADO, TEMOS $\dim \operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = 1.$

AGORA OBSERVAMOS QUE p_A TEM UMA ÚNICA RAIZ. LOGO $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2.$

PELO TEOREMA DE CAYLEY, TEMOS $(A - \lambda_0 I)^2 = 0.$

ASSIM, $(A-\lambda_0 I)\underbrace{(A-\lambda_0 I)X}_{\operatorname{Im}(A-\lambda_0 I)} = 0, \ \forall X \in \mathbb{R}^2.$

LOGO $\underset{\text{dimensão } 1}{\operatorname{Im}(A-\lambda_0 I)} \subset \underset{\text{DIMENSÃO } 1.}{N(A-\lambda_0 I)}$ $\Bigg\}$ $\operatorname{Im}(A-\lambda_0 I) = N(A-\lambda_0 I).$

SEJA $u \notin N(A-\lambda_0 I)$, $v = -(\lambda_0 I - A)u \in \operatorname{Im}(A-\lambda_0 I) = N(A-\lambda_0 I).$

ASSIM $Av = \lambda_0 v \quad ((A-\lambda_0 I)v = 0).$

$Au = v + \lambda_0 u.$

$P = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$. LOGO $AP = A\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au & Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + \lambda_0 u & \lambda_0 v \end{pmatrix}$

$//$

$P\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 u_1 + v_1 & \lambda_0 v_1 \\ \lambda_0 u_2 + v_2 & \lambda_0 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + \lambda_0 u & v\lambda_0 \end{pmatrix}$

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

3) SABEMOS QUE $\exists \{u, v\}$ L.I. T.Q. $Au = au - bv$
$Av = bu + av$

BASTA TOMAR $P = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$

$$AP = A\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au & Av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bv & bu + av \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 - bv_1 & bu_1 + av_1 \\ au_2 - bv_2 & bu_2 + av_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} au - bv & bu + av \end{pmatrix}$$

$$AP = P\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Seja λ um autovalor de A.

Logo $\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ t.q. $\underline{AX = \lambda X}$.

Seja V_λ o conjunto de todos os autovetores associados a λ mais o vetor nulo.

Logo $X \in V_\lambda \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda I X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow X \in N(A-\lambda I)$

$V_\lambda = N(A - \lambda I) = \{X \in \mathbb{C}^n;\ AX = \lambda X\}$. É espaço vetorial

Logo $\exists$ base de V_λ.

No caso em que $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, temos que V_λ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$. Logo $\dim V_\lambda = 1, 2$.

Se $N(\lambda_0 - IA)$ tiver dimensão $2 \Leftrightarrow \exists\ X_1, X_2$ L.I. t.q. $AX_1 = \lambda X_1$
$AX_2 = \lambda X_2$

Se $N(\lambda_0 - IA)$ tiver dimensão $1 \Leftrightarrow \exists\ X \neq 0$ t.q. $AX = \lambda X$ e todo $Y \neq 0$ t.q. $AY = \lambda Y$ é múltiplo de X.