$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad , \; y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

$n = 1$ $$\left.\begin{array}{l} y'(t) = a\,y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \; y(t) = e^{a(t-t_0)} y_0 .$$

$t_0 = 0$ $$y(t) = e^{at} y_0 \underset{\text{TAYLOR}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (at)^j y_0$$

$$\begin{array}{l} Y'(t) = A\,Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \quad , \; Y \in \mathbb{R}^n, \; A \in \mathbb{R}^{n \times n} \; (M_{n\times n}(\mathbb{R}))$$

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \, Y_0$$

MOTIVOU A DEFINIÇÃO $e^X = \exp(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n} = M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

VIMOS EXEMPLOS

QUESTÕES: 1) O QUE QUER DIZER SÉRIE DE MATRIZES? O QUE QUER DIZER CONVERGÊNCIA DE MATRIZES?

2) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$ SEMPRE CONVERGE?

3) $Y(t) = e^{tA} Y_0$ É SOLUÇÃO DE $Y'(t) = A\,Y(t)$, $Y(t_0) = Y_0$?

NORMAS DE ESPAÇOS VETORIAIS.

DEFINIÇÃO: SEJA E UM ESPAÇO VETORIAL. UMA NORMA $N: E \to [0,\infty[$ É UMA FUNÇÃO QUE SATISFAZ AS SEGUINTES PROPRIEDADES:

1) $N(x) = 0 \iff x = 0$
2) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \ \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\text{ou } \mathbb{C})$
3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y), \ \forall x, y \in E$.

OBSERVAÇÃO: EM GERAL, DENOTAMOS NORMA POR $N(x) = \|x\|_*$

EXEMPLOS: $\mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

i) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.

1) $\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 0 \iff x_j = 0, \ \forall j$.

2) $\|\lambda x\| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = |\lambda| \|x\|_1$

3) $\|x+y\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|) = \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

ii) $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1,\ldots,n\}} |x_j|$.

iii) $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}$.

iv) $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$ (+ DIFÍCIL DE VERIFICAR).

$1 \leq p < \infty$

EXEMPLOS $\mathbb{R}^{n\times n} = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ MATRIZES $n \times n$.

i) $\|A\|_1 := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

ii) $\|A\|_\infty := \max_{i,j} |A_{ij}|$

iii) $\|A\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$

iv) $\|A\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$

v) $\|A\|_e := \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$. (POPULAR!)

VAMOS USAR i). $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{ij}|$.

COMENTÁRIO: ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

DEFINIÇÃO: SEJA E UM ESPAÇO VETORIAL REAL. UM PRODUTO INTERNO $p: E \times E \to \mathbb{R}$ É UMA FUNÇÃO QUE SATISFAZ:

1) $p(x,x) \geq 0$ e $p(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $p(x+y,z) = p(x,z) + p(y,z)$, $\forall x,y,z \in E$

3) $p(\lambda x, z) = \lambda p(x,z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x,z \in E$

4) $p(x,y) = p(y,x)$, $\forall x,y \in E$.

OBSERVAÇÃO: Notação $p(x,y) = \langle x,y\rangle$ (ou (x,y))

EXEMPLOS: i) $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

CURIOSIDADE

ii) $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad \langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} \quad \left(= Tr(AB^T)\right)$.

Traço de matriz: Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

$$(AB^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B^T_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ik} \qquad Tr(AB^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ik}$$

DEFINIÇÃO: Dado E um espaço com produto, definimos uma norma como $\quad \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

EXEMPLO: $\mathbb{R}^n$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$.

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad \|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2\right)^{1/2}$.

PROPOSIÇÃO: A norma $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\forall x \in E$, satisfaz as propriedades de norma que foram definidas lá atrás.

DEMO: i) $\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \iff \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle \lambda x, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x,x\rangle}$

$= |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$.

iii) $\|x+y\| \overset{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$.

$$\underbrace{\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}}_{\|x+y\|} = \sqrt{\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle} \underset{\text{CAUCHY-SCHWARZ}}{\leq} \sqrt{\underbrace{\langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle}_{(\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2}}$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$$

$$= \sqrt{(\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2})^2} = \underbrace{\langle x,x\rangle^{1/2}}_{\|x\|} + \underbrace{\langle y,y\rangle^{1/2}}_{\|y\|}.$$

USAMOS CAUCHY-SCHWARZ $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

Demo: Seja $f(t) = \langle x+ty, x+ty\rangle \geq 0$

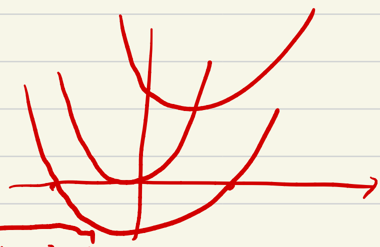
$$f(t) = \langle x, x+ty\rangle + t\langle y, x+ty\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + t\langle x,y\rangle + t\langle y,x\rangle + t^2\langle y,y\rangle$$

$$= \underbrace{\|x\|^2}_{c} + \underbrace{2t}_{b}\langle x,y\rangle + t^2\underbrace{\|y\|^2}_{a}$$

O POLINÔMIO $f(t)$ TEM NO MÁXIMO

UMA RAIZ REAL, POIS $f(t) \geq 0$.



AS RAÍZES SÃO $t = -\frac{2\langle x,y\rangle}{2\|y\|^2} \pm \frac{\sqrt{4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2}}{2\|y\|^2}$.

LOGO $4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

CONCLUSÃO $4\langle x,y\rangle^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2$

$$\Longrightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \blacksquare$$

A PARTIR DE AGORA VAMOS USAR

PODE SER $\mathbb{C}$.

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|, \quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

PROPOSIÇÃO: SE $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ENTÃO $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

DEMO: LEMBRAMOS $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$.

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|\,|B_{kj}|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|\left(\sum_{j=1}^{n}|B_{kj}|\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|\,\|B\| = \|A\|\,\|B\| \quad \blacksquare$$

$$\hookrightarrow \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}| := \|B\|$$

DEFINIÇÃO: SEJA E UM ESPAÇO VETORIAL NORMADO. LOGO

1) DIZEMOS QUE UMA SEQUÊNCIA $(x_n) \subset E$ CONVERGE PARA $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, SE $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

2) DIZEMOS QUE UMA SÉRIE $\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)_n \subset E$ CONVERGE PARA $x \in E$, $\sum_{j=0}^{\infty} x_j = x$, SE $\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{j=0}^{n} x_j - x\right\| = 0$.

EM PARTICULAR, PARA MATRIZES TEMOS

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = A \iff \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} A_j - A \right\| = 0.$$

ACABAMOS DE RESPONDER A 1º PERGUNTA!

<u>PROPOSIÇÃO</u>: SEJA $(A_n)_n$ UMA SEQUÊNCIA DE MATRIZES E $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

LOGO $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \lim_{n\to\infty} A_{ij}^n = A_{ij}, \ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$.

(AQUI $(A_n)_{ij} = A_{ij}^n$, $(A)_{ij} = A_{ij}$).

<u>DEMO</u>: $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^n - A_{ij}| = 0$

$\iff \lim_{n\to\infty} |A_{ij}^n - A_{ij}| = 0, \forall i,j.$ $\boxtimes$

($\Rightarrow$) DADO $\varepsilon > 0$, $\exists N$ T.Q. SE $n \geq N$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^n - A_{ij}| < \varepsilon$

$\Rightarrow |A_{ij}^n - A_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^n - A_{ij}| < \varepsilon. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_{ij}^n = A_{ij}$

($\Leftarrow$) DADO $\varepsilon > 0$, $\exists N$ T.Q. SE $n \geq N_{ij}$ $|A_{ij}^n - A_{ij}| < \varepsilon$. SEJA $N := \max N_{ij}$.

LOGO SE $n \geq N$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^n - A_{ij}| < n^2 \varepsilon. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^n - A_{ij}| = 0$

COROLÁRIO: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A_{ij}^{k} = A_{ij}$ $\oplus$

OU SEJA, UMA SÉRIE DE MATRIZES CONVERGE $\Leftrightarrow$ A SÉRIE CORRESPONDENTE A CADA TERMO CONVERGE.

DEMO: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_{ij}^{k} = A_{ij}$

APLICAMOS A PROP. ANTERIOR PARA A SEQUÊNCIA $\left(\sum_{j=0}^{n} A_j\right)_n$.

RECORDAÇÃO DE ANÁLISE: SEJA $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ UMA SÉRIE DE NÚMERO REAIS. SE $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, ENTÃO A SÉRIE CONVERGE.

(SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES SÃO CONVERGENTES).

PROPOSIÇÃO: SEJA $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ UMA SÉRIE DE MATRIZES. SE $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty$, ENTÃO A SÉRIE CONVERGE.

DEMO: SE $(A_k)_{ij} = A_{ij}^{k}$, ENTÃO $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{ij}^{k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < \infty$.

$|A_{ij}^{k}| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}^{k}| = \|A^k\|$

LOGO $\sum_{k=0}^{\infty} A_{ij}^{k}$ É CONVERGENTE (PELA NOSSA REVISÃO DE ANÁLISE)

LOGO $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ CONVERGE, PELO COROLÁRIO ⊕ $\boxtimes$

<u>TEOREMA:</u> A SÉRIE $e^X := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$ SEMPRE CONVERGE.

<u>DEMO:</u> BASTA PROVAR QUE $\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!} X^j \right\| < \infty$.

DE FATO, $\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!} X^j \right\| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|X^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|X\|^j = e^{\|X\|} < \infty$

$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

$\|X^j\| \leq \|X\|^j$

$\boxtimes$

ACABAMOS DE RESPONDER A 2ª QUESTÃO