

Introdução às Medidas em Física 4300152

DISCIPLINA OFERECIDA REMOTAMENTE

1

Atividades

Experimentos

7 experiências – Atividades

Exercícios - individual (casa)

Guias/relat - grupo (casa)

Provas - 2 provas: Individualizar notas

Prova 1: 4 primeiras experiências

Prova 2: Todos os experimentos

PLANEJAMENTO INICIAL

	Quinta Feia (tarde e noite)	Sexta Feia (manhã e noite)	Relatório
Fevereiro	27-02-2020 - Aula 1 - EXP 1-1	28-02-2020 - Aula 1 - EXP 1-1	
Março	05-03-2020 - Aula 2 - EXP 1-2	06-03-2020 - Aula 2 - EXP 1-2	Entrega R1-1
	12-03-2020 - Aula 3 - EXP 2-1	13-03-2020 - Aula 3 - EXP 2-1	Entrega R1-2
	19-03-2020 - Aula 4 - EXP 2-2	20-03-2020 - Aula 4 - EXP 2-2	Entrega R2-1
	26-03-2020 - Aula 5 - EXP 3	27-03-2020 - Aula 5 - EXP 3	Entrega R2-2
Abril	02-04-2020 - Aula 6 - EXP 4-1	03-04-2020 - Aula 6 - EXP 4-1	Entrega R3
	SEMANA SANTA - Não haverá aula	SEMANA SANTA - Não haverá aula	Entrega R4-1
	16-04-2020 - Aula 7 - EXP 4-2	17-04-2020 - Aula 7 - EXP 4-2	
	23-04-2020 - PROVA 1	24-04-2020 - PROVA 1	Entrega R4-2
Maio	1o de maio - Não haverá aula	1o de maio - Não haverá aula	
	07-05-2020 - Aula 8 - EXP 5-1	08-05-2020 - Aula 8 - EXP 5-1	
	14-05-2020 - Aula 9 - EXP 5-2	15-05-2020 - Aula 9 - EXP 5-2	
	21-05-2020 - Aula 10 - EXP 6	22-05-2020 - Aula 10 - EXP 6	Entrega R5
	28-05-2020 - Aula 11 - EXP 7-1	29-05-2020 - Aula 11 - EXP 7-1	Entrega R6
Junho	04-06-2020 - Aula 12 - EXP 7-2	05-06-2020 - Aula 12 - EXP 7-2	
	Corpus Christi - Não haverá aula	Corpus Christi - Não haverá aula	Entrega R7
	18-06-2020 - PROVA 2	19-06-2020 - PROVA 2	

2

Experimentos

Experimento 1	Calibração de medidas e Pêndulo simples (2 aulas)
Experimento 2	Densidade de Sólidos (2 aulas)
Experimento 3	Distância focal de uma lente (1 aula)
Experimento 4	Queda livre (2 aulas)
Experimento 5	Curvas características (2 aulas)
Experimento 6	Resfriamento de um líquido (1 aula)
Experimento 7	Cordas vibrantes (2 aulas)

3

Experimentos

Experimento 1	Calibração de medidas e Pêndulo simples (2 aulas) ✓
Experimento 2	Densidade de Sólidos (2 aulas) ✓
Experimento 3	Distância focal de uma lente (1 aula)
Experimento 4	Queda livre (2 aulas)
Experimento 5	Curvas características (2 aulas)
Experimento 6	Resfriamento de um líquido (1 aula)
Experimento 7	Cordas vibrantes (2 aulas)

4

Atividades e Cronograma

Dinâmica do curso { **para cada experimento: 1 aula de teoria e 1 de atividades;**
1 relatório entregue pelo e-disciplinas (grupo) e
1 lista de exercícios online no e-disciplinas (individual)
cada 2 ou 3 experimentos: 1 prova online (individual)

Todo o material didático estará disponível no e-disciplinas
 Aulas remotas, síncronas, usando plataforma Zoom
 Aulas teóricas serão gravadas e disponibilizadas no e-disciplinas
 Gráficos serão feitos com software específico
 Relatórios curtos, seguindo o guia e material do e-disciplinas, com breve introdução, apresentação de dados e de resultados, discussão/ conclusões.
 Relatórios, com planilhas de cálculo, entregas e correções pelo e-disciplinas
 Provas online pelo e-disciplinas – 3h para fazer a prova em um intervalo de tempo de 48h.

Recomendações

usem o tempo entre a aula teórica e a aula de atividades para analisar os dados, obter resultados, fazer gráficos etc e TRAGAM DÚVIDAS para a aula de atividades.
FAÇAM OS EXERCÍCIOS ONLINE

Use o Fórum de Dúvidas

5

Experimento	Atividades	Avaliação
Volume e densidade de Cilindros	14/01/21 - Aula teórica 1 14-18h e 19-23h	Entrega de relatório até 29/1 Exercícios online até 27/1
	15/01/21 - Aula teórica 1 08-12h	
	21/01/21 - Aula de atividades 1 14-18h e 19-23h	
	22/01/21 - Aula de atividades 1 08-12h	
Queda Livre	28/01/21 - Aula teórica 2 14-18h e 19-23h	Entrega de relatório até 12/2 Exercícios online até 10/2
	29/01/21 - Aula teórica 2 08-12h	
	04/02/21 - Aula de atividades 2 14-18h e 19-23h	
	05/02/21 - Aula de atividades 2 08-12h	
Pêndulo Simples; Volume e Densidade de cilindros; Queda Livre	17 a 19/2 – PROVA 1	3h para fazer, no período indicado
Curvas características	11/02/21 - Aula teórica 3 14-18h e 19-23h	Entrega de relatório até 26/2 Exercícios online até 24/2
	12/02/21 - Aula teórica 3 08-12h	
	18/02/21 - Aula de atividades 3 14-18h e 19-23h	
	19/02/21 - Aula de atividades 3 08-12h	
Cordas Vibrantes	25/02/21 - Aula teórica 4 14-18h e 19-23h	Entrega de relatório até 8/3 Exercícios online até 10/3
	26/02/21 - Aula teórica 4 08-12h	
	04/03/21 - Aula de atividades 4 14-18h e 19-23h	
	05/03/21 - Aula de atividades 4 08-12h	
Curvas Características; Cordas Vibrantes	10 a 12/3 – PROVA 2	3h para fazer, no período indicado

6

Equipe

Turmas	
Quintas 14-18h	Elisabeth Mateus Yoshimura Marli Cantarino
Quintas 19-23h	Alexsandro Kirch Luan Santos Lima
Sextas 8-12h	Alexandre Cândido Teixeira Danilo Mustafa (coordenador)
Monitor para todas as turmas	Leonardo de Oliveira Santos

7

Cálculo da média

- Notas dos relatórios dos 4 experimentos remotos: R_{expi} , $i = 1, 2..4$
- Notas dos exercícios online: Ex_i , $i=1, 2..4$
- Nota das atividades: $R_i = 0,9 R_{\text{expi}} + 0,1Ex_i$
- Média das atividades: $R = (R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - R_{\text{mín}})/4$
- Média das Provas: $P = (P_1 + P_2)/2$
- Média na disciplina: $M = (2 \cdot R + 1 \cdot P)/3$
- Se $M \geq 5$: Aprovado

- R_0 é a nota já composta (relatórios e exercícios online) para o experimento do pêndulo realizado presencialmente no início da disciplina em 2020.
- R_1 é a nota do experimento de densidades, levando em conta as etapas realizadas em 2020 e em 2021.
- Para o cálculo da média das atividades (R) é subtraída a nota de atividade mais baixa ($R_{\text{mín}}$).

8

Incertezas instrumentais

Análise do instrumento de medida

identificação do tipo e funcionamento

Fundo de escala e unidade

seleção conveniente

Precisão e incerteza da medida

Escala simples, situações boas de medida: incerteza \sim metade da menor divisão

Digital: pelo menos a resolução (menor valor medido)

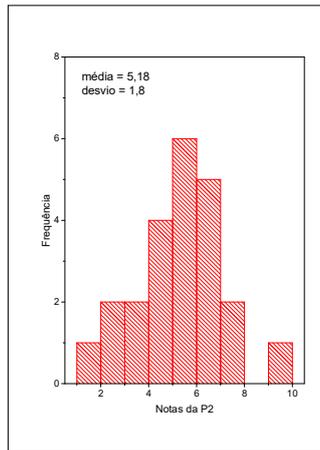
9

Incerteza devido ao método

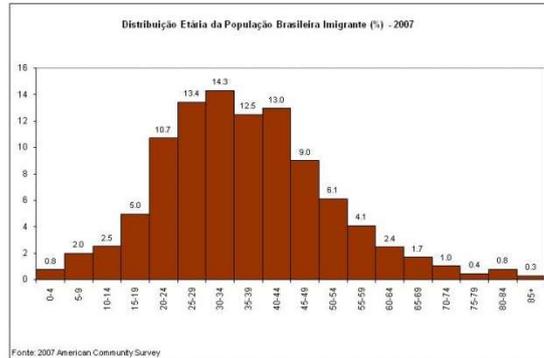
- Erros Estatísticos ou Aleatórios:
 - Resultam de variações aleatórias no resultado da medição devido a fatores que não podem ser controlados;
 - A estimativa desse erro é chamada de incerteza estatística;
 - Essa incerteza é obtida por métodos estatísticos, como o desvio padrão da média.
- Há uma distribuição de valores medidos, concentrados em um intervalo
- Há várias distribuições possíveis de valores medidos
- Grandezas físicas sujeitas a erros aleatórios costumam se distribuir de forma simétrica próxima a uma gaussiana (distribuição normal ou de Gauss)

10

Incerteza devido ao método como apresentar resultados?

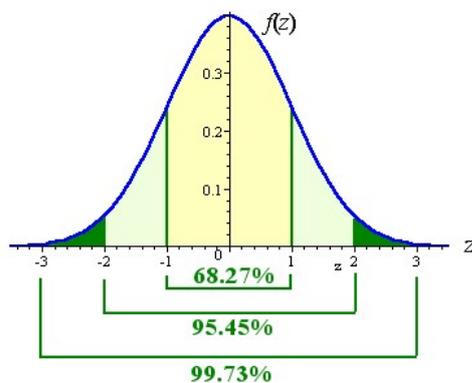


Histogramas
frequência absoluta ou
relativa



11

Interpretação de distribuições de valores - probabilidades



$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuição normal
 $z = (x - m)/s$

12

Compondo Incertezas de Método e de Instrumento

- São independentes (embora a do instrumento deva ser pequena para que a do método (estatístico) “apareça”)
- Ambas são avaliações do erro da medida (diferença entre valor verdadeiro e valor medido)

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{método}}^2} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estatístico}}^2}$$

- Exemplos no pêndulo:

$$23,08s \quad s_m = 0,05s \quad \text{e} \quad \sigma_{instr} = 0,01s$$

$$\sigma_{final} = \sqrt{0,05^2 + 0,01^2} = 0,05s$$

$$23,34s \quad s_m = 0s \quad \text{e} \quad \sigma_{instr} = 1s$$

$$\sigma_{final} = \sqrt{0,0^2 + 1^2} = 1s$$

13

Qual é a incerteza de uma medida?

Várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua

$$\sigma_{L_{instr}} = 0,5 \text{ mm}$$

$$\sigma_{L_{estat}}$$

$$\sigma_{L_{final}}^2 = \sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estat}}^2$$

(Combinação quadrática dos erros)

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

Período do pêndulo medido com o relógio de precisão 1s
Incerteza instrumental > estatística

Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s
Incerteza estatística > instrumental

14

Experiência Densidade de Sólidos

- **Objetivos**
 - Medidas indiretas
 - Medida da densidade de sólidos
 - Incertezas
 - Propagação de Incertezas
 - Compatibilidade entre medidas
 - Responder a perguntas: são iguais?
São compatíveis?



15

Medida da Densidade de Sólidos

- **Objetivo**
 - Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos
- **Identificação**
 - Comparação das medidas (e incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos
- **Densidade (materiais sólidos homogêneos)**
 - $d = m/V$
 - Necessário medir a massa e o volume do objeto

16

Cálculo da densidade

- A densidade é dada por: $d = \frac{m}{V}$

onde, o volume V é:

$$V = \pi H r^2 = \pi H \frac{D^2}{4}$$

e m , H e D são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro.

17

Sequência de trabalho já realizado

- Medidas das dimensões de 4 ou 5 cilindros pelos diversos grupos, sendo os sólidos de cada grupo construídos de mesmo material;
- **Situação 1**
 - dimensões dos cilindros (altura e diâmetro) medidos com régua. Anotar nas tabelas.
 - massas dos cilindros medidos com balança digital da sala (décimo de grama)
- **Situação 2**
 - massas dos cilindros medidos com balança analítica da sala de técnicos do Didático (décimo de miligrama)

18

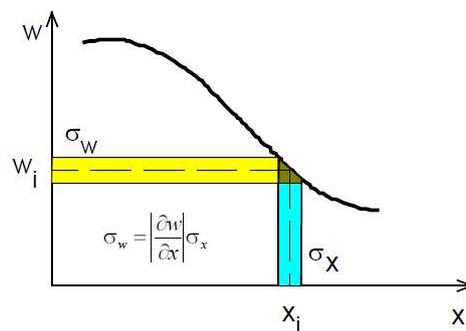
Sequência de trabalho análise de dados

Propagação de incertezas

- Cálculo dos volumes dos sólidos
- Cálculo da **incerteza dos volumes** dos sólidos:
 - Como varia o volume se a **altura** muda dentro do intervalo de incerteza?
 - Como varia o volume se o **diâmetro** muda dentro do intervalo de incerteza?
 - Como juntar as duas variações?
- Como obter a incerteza da densidade, conhecendo as incertezas da massa e do volume?
- Comparar valores de densidade

19

Propagação de Incertezas



20

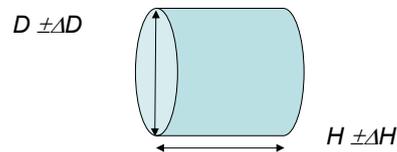
Propagação de incerteza

Se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?

O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi (D/2)^2 H$$

onde, D é o diâmetro do cilindro e H a sua altura ambos com incerteza



21

Propagação de incerteza

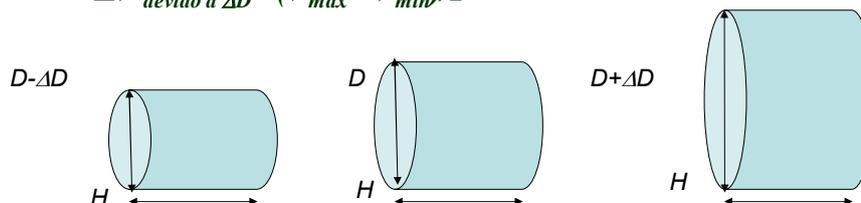
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a **incerteza no diâmetro** e a incerteza no volume devido a **incerteza na altura** e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza no diâmetro:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi [(D + \Delta D)/2]^2 H$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi [(D - \Delta D)/2]^2 H$$

$$\Delta V_{\text{ devido a } \Delta D} = (V_{max} - V_{min})/2$$



22

Propagação de incerteza

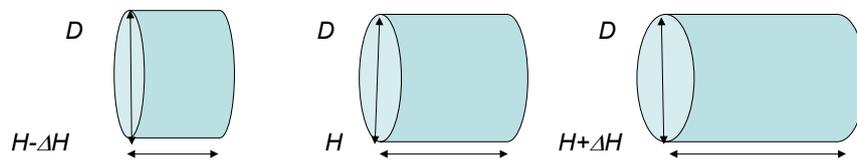
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no diâmetro e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta H) = \pi(D/2)^2(H+\Delta H)$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta H) = \pi(D/2)^2(H-\Delta H)$$

$$\Delta V_{\text{devido a } \Delta H} = (V_{max} - V_{min})/2$$

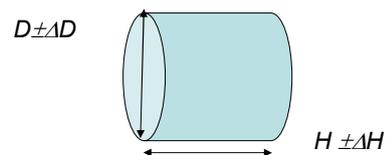


23

Propagação de incerteza

E combinamos as duas incertezas com uma soma quadrática. Fazemos isso pois assumimos que a medida do diâmetro é independente da medida da altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta H})^2$$



24

1ª estimativa da incerteza do volume do cilindro

Mesmo cientes que a contribuição das incertezas do diâmetro e altura são independentes, nesta primeira avaliação calcularemos a incerteza do volume do cilindro (ΔV) como a propagação simultânea dos valores das incertezas do diâmetro e da altura :

Isso foi feito no experimento até aqui. Vamos estender esse conceito de propagação, fazendo cálculos mais realistas para a incerteza propagada.

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{(D + \Delta D)^2 (H + \Delta H) - (D - \Delta D)^2 (H - \Delta H)}{2} \right]$$

25

Propagação da incerteza variáveis independentes

Supondo $f(x)$ uma **Medida Indireta** (função de uma medida direta)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_{max}) = f(X + \Delta X) \\ f(x_{min}) = f(X - \Delta X) \end{array} \right.$$

$$\Delta f(x) = \frac{f(x_{max}) - f(x_{min})}{2} \quad (\text{Incerteza da medida de } f(X) \text{ devido à incerteza de } X)$$

$$\Delta f(x) = \frac{f(X + \Delta X) - f(X - \Delta X)}{2}$$

Multiplicando por: $\frac{\Delta X}{\Delta X}$

26

$$\Delta f(x) = \left[\frac{f(x + \Delta X) - f(x - \Delta X)}{2\Delta X} \right] \Delta X$$

Utilizando a definição de derivada:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta X' \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta X') - f(x - \Delta X')}{2\Delta X'} \right]$$

Temos:

$$\Delta f(x) = \frac{df(x)}{dx} \Delta X \quad (\text{para } \Delta X \text{ muito pequeno})$$

Se $f = f(x, y, z, \dots)$ **função de várias medidas diretas**, então:

$$\Delta_X f(x, y, z, \dots) = \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Delta X$$

27

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \rightarrow \text{É a derivada parcial de } f(x, y, z, \dots) \text{ em} \\ \text{relação a } X. \\ \Delta X \rightarrow \text{É a incerteza da grandeza } X. \end{array} \right.$$

- Como a incerteza total de uma medida indireta é a combinação quadrática das incertezas das grandezas associadas **obtidas de maneira independente**, temos:

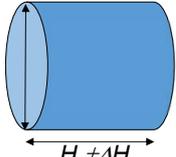
$$\Delta f(x, y, z, \dots) = \sqrt{(\Delta_X f(x, y, z, \dots))^2 + (\Delta_Y f(x, y, z, \dots))^2 + \dots}$$

Portanto:

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \right)^2 \Delta Y^2 + \dots}$$

28

Propagação da incerteza para o volume do cilindro



$D \pm \Delta D$

$H \pm \Delta H$

$$V = \pi r^2 H = \pi \frac{D^2}{4} H \rightarrow V = f(D, H)$$

Portanto:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)^2 (\Delta H)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 (\Delta D)^2}$$

Substituindo as derivadas:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\pi \bar{D}^2}{4}\right)^2 (\Delta \bar{H})^2 + \left(\frac{\pi \bar{D} \bar{H}}{2}\right)^2 (\Delta \bar{D})^2}$$

\bar{D} é o valor médio do diâmetro
 \bar{H} é o valor médio da altura
 $\Delta \bar{D}$ e $\Delta \bar{H}$ são suas incertezas

29

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\pi \bar{D}^2}{4}\right)^2 (\Delta \bar{H})^2 + \left(\frac{\pi \bar{D} \bar{H}}{2}\right)^2 (\Delta \bar{D})^2}$$

Ou, simplificando:

$$\Delta V = V \sqrt{\left(\frac{2\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}$$

Comparando com a feita anteriormente:

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{mi}}{2} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{(D + \Delta D)^2 (H + \Delta H) - (D - \Delta D)^2 (H - \Delta H)}{2} \right]$$

30

Mesmo raciocínio para a densidade

$$d = \frac{m}{V}$$

$$\frac{\partial d}{\partial m} = \frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial d}{\partial V} = \frac{-m}{V^2}$$

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{1}{V}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{-m}{V^2}\right)^2 \Delta V^2}$$

Ou, simplificando:

$$\Delta d = d \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

Cálculo Anterior: $\Delta d = \frac{d_{max} - d_{mi}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(m + \Delta m)}{(V - \Delta V)} - \frac{(m - \Delta m)}{(V + \Delta V)} \right]$

31

Incertezas Relativas

As expressões abaixo nada mais são que incertezas relativas

$$\Delta V = V \sqrt{\left(\frac{2\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2} \quad \text{e} \quad \Delta d = d \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2} \quad \frac{\Delta d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

Sempre que temos variáveis indiretas obtidas por operações como MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO E POTENCIAÇÃO, trabalhar com incertezas relativa ajuda a ter uma visão global sobre a incerteza do experimento.

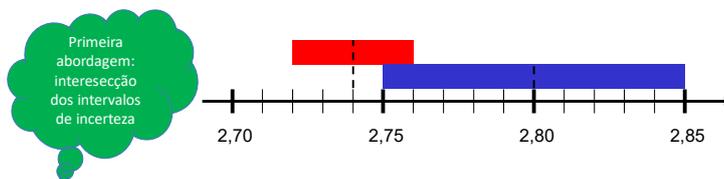
$$f(x, y, z \dots) = a \frac{x^p}{y^q} z \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{p\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{q\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \dots}$$

Onde: a é constante e p e q racionais

32

Como comparar os resultados de duas medidas ou comparar a padrão?

- É preciso se levar em consideração sempre a incerteza de medida.
- Como devemos considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são compatíveis ao invés de “iguais”;
- Por exemplo, $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$ é compatível com $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$?



33

Compatibilidade – segunda abordagem

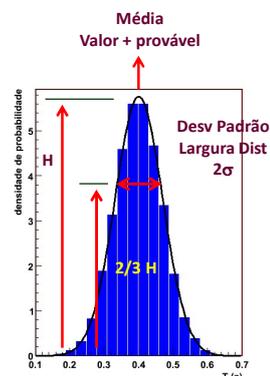
Incerteza define um **Intervalo confiança**

Paralelo com distribuição estatística:

- No intervalo $[M - \Delta; M + \Delta]$ \rightarrow 68%
- $[M - 2\Delta; M + 2\Delta]$ \rightarrow 95%
- $[M - 3\Delta; M + 3\Delta]$ \rightarrow 99,9%

Nesses intervalos mais largos, não é possível descartar a compatibilidade completamente.

Interpretação estatística com teste Z



34

Critério para compatibilidade – teste Z



- Superposição em 1 desvio padrão → compatíveis
 - Superposição testada em intervalos mais largos 2 ou 3 desvios padrão: verificam compatibilidade com menor probabilidade.
- Teste Z indica essa probabilidade
 - Comparação entre $(a \pm \Delta_a)$ e $(b \pm \Delta_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2}}$$

$0 < Z \leq 1$, compatíveis dentro de 1 desvio-padrão (68%)
 $1 < Z \leq 2$, compatíveis dentro de 2 desvios-padrão (95%)
 $2 < Z \leq 3$, compatíveis dentro de 3 desvios-padrão (99,9%)
 $Z > 3$, discrepantes ou não compatíveis

35

Tarefas para esta atividade

- Obter novamente as incertezas dos volumes e das densidades (obtidas com a massa medida na balança analítica), empregando as novas expressões para a propagação de incertezas
- Verificar se os valores para os 4 ou 5 sólidos são compatíveis entre si, usando teste Z, concluindo se podem ou não ser constituídos do mesmo material.
- Comparar a densidade de um dos sólidos com os possíveis plásticos para determinar (ou não) de qual plástico ele foi feito.

36

Análise de compatibilidade

Peça	2	3	4	5
1	Z (1,2)	Z (1,3)	Z (1,4)	Z (1,5)
2		Z (2,3)	Z (2,4)	Z (2,5)
3			Z (3,4)	Z (3,5)
4				Z (4,5)

37

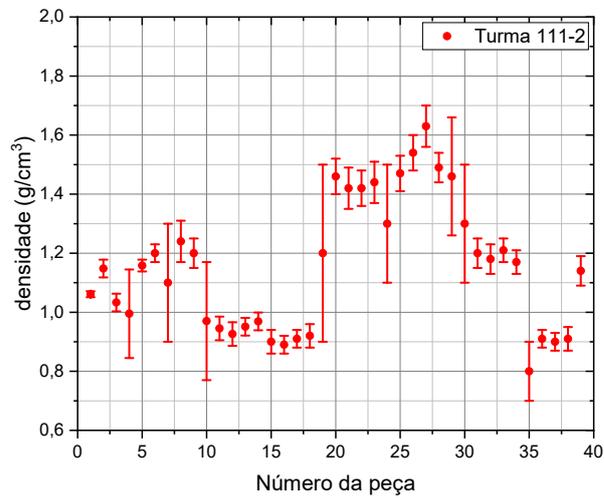
Analisar a compatibilidade da densidade da peça cuja densidade tem a menor incerteza com esses 5 plásticos (incertezas são metade de cada intervalo da tabela)

Tabela de densidade esperada para os plásticos

■ Poliamida (nylon)	$d = 1.09 \text{ a } 1.14 \text{ g/cm}^3$
■ Polietileno	$d = 0.941 \text{ a } 0.965 \text{ g/cm}^3$
■ Polipropileno	$d = 0.900 \text{ a } 0.915 \text{ g/cm}^3$
■ Acrílico	$d = 1.17 \text{ a } 1.20 \text{ g/cm}^3$
■ PVC	$d = 1.35 \text{ a } 1.45 \text{ g/cm}^3$

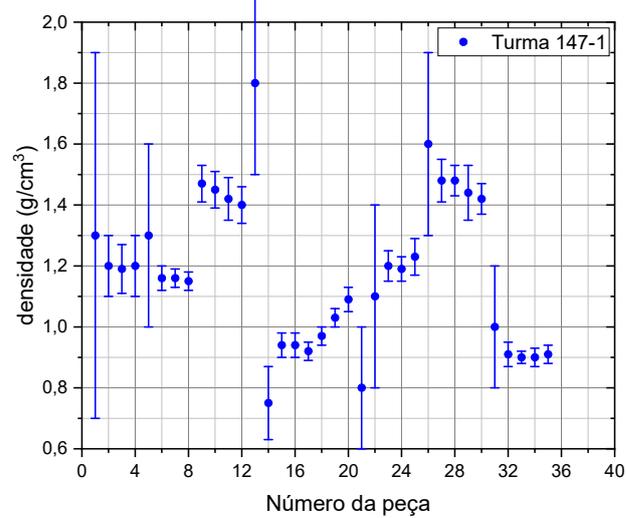
38

Gráfico com todos os resultados da turma



39

Gráfico com todos os resultados da turma



40