MAP 3122 - Métodos Numéricos e Aplicações (POLI)

Lista de Exercícios sobre sistemas lineares

Exercício 1. *Consideramos a matriz seguinte*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efetue todos os cálculos neste exercício utilizando frações.

1. *Usando a eliminação de Gauss, transforme A em uma matriz triangular superior.*

2. *Use este resultado para calcular o determinante de A (dica: adicionar algum múltiplo de uma linha a outra linha não altera o determinante duma matriz.)*

3. *Usando o item 1., calcule a matriz inversa A^{-1} de A (dica: calcular A^{-1} é equivalente a calcular a solução X da equação $AX = I_4$, onde $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ é uma matriz quadrada e $I_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ é a matriz identidade. Observe que a equação $AX = I_4$ pode ser vista como 4 sistemas lineares, um para cada coluna de X).*

Exercício 2. *Considere o sistema linear*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Verifique se ele satisfaz o critério de linhas e o critério Sassenfeld. Podemos concluir que o método de Gauss-Seidel aplicado a este sistema converge ou diverge?*

2. *O sistema do item 1. é equivalente ao sistema*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   O método de Gauss-Seidel aplicado a este sistema converge? Justifique.

Exercício 3. *É dado o sistema linear*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -4. \end{aligned}$$

1. Resolva o sistema dado pelo método de Gauss com condensação pivotal, utilizando ponto flutuante com 2 algarismos significativos.

2. Verifique se o sistema linear dado satisfaz o Critério de Sassenfeld. Em caso negativo, troque a posição das equações no sistema, de forma que, para o sistema equivalente assim obtido, o Critério das linhas assegure a convergência do Método de Gauss-Seidel.

3. Sem efetuar as iterações, e partindo da aproximação inicial $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$, bem como sabendo que $|x_1| \leq 2, |x_2| \leq 2, |x_3| \leq 2$, determine um número de iterações que assegure um erro inferior a $\epsilon = 0,01$ em cada uma das variáveis, ao se aplicar o método de Gauss-Seidel ao sistema para o qual tal método converge, conforme o item 2.

4. Calcule duas iterações pelo Método de Gauss-Seidel a partir de $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Exercício 4. *Calcule as fatorações LU das matrizes a seguir usando o método de Doolittle.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5. *Seja A uma matriz tridiagonal:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

e os outros coeficientes de A são zeros. Suponha que é possível obter a decomposição LU de A sem trocas de linhas. Então pode-se mostrar que L e U têm as seguintes estruturas:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & & \\ & u_{22} & u_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & & & & u_{n,n} \end{pmatrix},$$

e os outros coeficientes de L e U são zeros.

1. *Usando a propriedade $A = LU$, escreve formulas para $a_{i,i}$, $a_{i,i+1}$ e $a_{i+1,i}$ em função dos coeficientes de L e U, no caso particular onde A é uma matriz tridiagonal.*

2. *Usando o item anterior, escreva um algoritmo para calcular direitamente os coeficientes de L e U neste caso particular onde A é uma matriz tridiagonal.*

3. *Escreva um algoritmo para a resolução de um sistema linear $Ax = b$ conhecendo-se a decomposição LU acima, no caso particular onde A é uma matriz tridiagonal.*

Exercício 6. *Calcule a fatoração de Cholesky da matriz seguinte*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. *Uma barra linear de um metro de comprimento é mantida a 0 graus em um extremo e a 128 graus no outro. Desejamos determinar a temperatura da barra a cada 20 cm. Denominando de $T_0 = 0$ a temperatura de um extremo, de $T_5 = 128$ a temperatura no outro extremo e de T_1, T_2, T_3 e T_4 a temperatura nos pontos interiores e sabendo que a temperatura em cada ponto interior é igual à média aritmética da temperatura de seus dois pontos vizinhos:*

1. *Escreva um sistema linear para a determinação de T_1, T_2, T_3 e T_4.*

2. *Calcule 4 iterações pelo método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema a partir da aproximação inicial nula.*

3. *Analise a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução deste sistema.*

Exercício 8. *Considere o sistema linear*

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 1.5 \\ 4x + 2y &= -2.0 \\ 2x + 2y &= 0.0 \end{aligned}$$

1. *Resolva esse sistema linear pelo método de eliminação de Gauss com condensação pivotal e aritmética de ponto flutuante com dois algarismos significativos.*

2. *Chamamos de* $u^\star = (x^\star, y^\star, z^\star)$ *a solução exata do sistema linear. Mostre que podemos aplicar o método de Gauss-Seidel para calcular uma aproximação de* $u^\star$ *de modo que*

$$\|u_k - u^\star\|_\infty \leq \beta \|u_{k-1} - u^\star\|_\infty$$

   com $\beta < 1$. *Calcule esse* β. *(aqui* $u_k = (x_k, y_k, z_k)$ *são as iterações de Gauss-Seidel e* $\|u\|_\infty := \max\{|x|, |y|, |z|\}$ *para um vetor* $u = (x, y, z)$*)*

3. *Usando a estimativa do item 2., mostre que* $\|u_k - u^\star\|_\infty \leq \frac{\beta^k}{1-\beta} \|u_1 - u_0\|_\infty$.

4. *Use o resultado do item 1. como aproximação inicial* u_0 *e calcule uma iteração do método de Gauss-Seidel. Estime o erro* $\|u_1 - u^\star\|_\infty$ *após esta iteração.*