Plantão extra

quarta-feira, 6 de janeiro de 2021 16:24

Para diminuir a latência:

... → Configurações → Vídeo
→ Resolução de entrada: 720p

$f(x,y,z,w) = (f_1, f_2) = (0,1)$

$(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w}) = (0,0,0,0)$

$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w}) = (0,1)$

Considere o sistema não linear

f_1: $x^2y^3 + e^x y + z\cos y + w^2 = 0,$

f_2: $e^{z-y} + \sin(x-y) + z^2\cos w = 1.$

1. Numa vizinhança de $(0,0,0,0)$ as soluções desse sistema não linear podem ser descritas na forma $(u, \eta(u,v), v) = (u, \eta_1(u,v), \eta_2(u,v), v)$ com (u,v) numa vizinhança de $(0,0)$? Por quê? Sim
2. Numa vizinhança de $(0,0,0,0)$ as soluções desse sistema não linear podem ser descritas na forma $(\gamma(u,v),u,v) = (\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v), u, v)$ com (u,v) numa vizinhança de $(0,0)$? Por quê? Sim
3. O conjunto S das soluções desse sistema tem espaço tangente no ponto $(0,0,0,0)$? Por quê? Sim, pq. é localmente graf. de função
4. Se a resposta em (c) foi afirmativa, qual a dimensão de $T_{(0,0,0,0)}S$? Por quê?

TF Implícita → temos uma sol. do sistema ñ-linear $f(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}) = k \in \mathbb{R}^2$

olho p/ $Df(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$

$$" = " \begin{bmatrix} \partial_a f_1 & \boxed{\partial_b f_1 \quad \partial_c f_1} & \partial_d f_1 \\ \partial_a f_2 & \boxed{\partial_b f_2 \quad \partial_c f_2} & \partial_d f_2 \end{bmatrix}$$

Calc. em $(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$
supõe que essa matriz quadrada tem det. $\neq 0$.

Então em uma vizinhança de $(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$:

$f(a,b,c,d) = k \Leftrightarrow (b,c) = \phi(a,d), \phi \in C^1$

S = graf η $\Rightarrow$ $T_{(0,0,0,0)}S = T_{(0,\eta(0,0),0)}$ graf. η
localmente
$=$ graf $d\eta(0,\eta(0,0),0)$ (dim. 2)

$$Df(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 2xy^3 + e^x y & 3x^2y^2 + e^x - z\sin y & \cos y & 2w \\ \cos(x-y) & -e^{z-y} - \cos(x-y) & e^{z-y} + 2z\cos w & -z^2\sin w \end{bmatrix}$$

$Df(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w}) = Df(0,0,0,0)$

→ tb. tem det $\neq 0$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

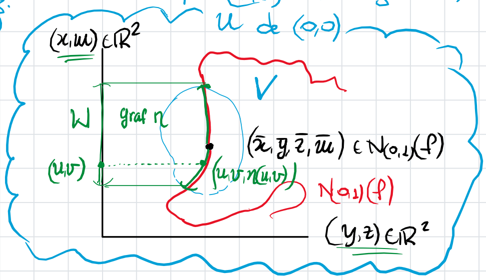
det. $D_{(y,z)}f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w}) = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ pelo TFImplícita existem uma vizinhança U de $(0,0)$, uma função C^1 $\eta: U \to \mathbb{R}^2$ e uma vizinhança V de $(0,0,0,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{w})$ tais que:

$(x,y,z,w) \in V$ e $f(x,y,z,w) = (0,1)$ $\Leftrightarrow$ $(y,z) = \eta(x,w)$, $(x,w) \in U$

solução desse sistema linear numa vz. de $(0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y,z,w) = (u, \eta(u,v), v)$, p/ (u,v) na vizinhança U de $(0,0)$



É parecido com: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $N_0(f) = \{$esfera de raio 1$\}$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

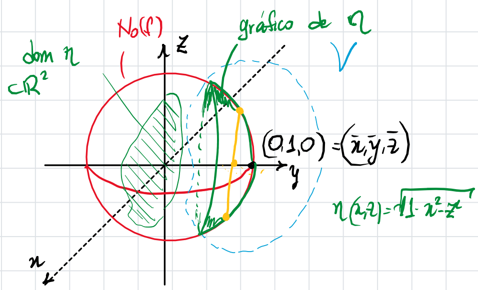
$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,1,0)$

Então $f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 0$

$Df = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix} \Rightarrow Df(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & 0 \end{bmatrix}$

Então TFImplícita diz que $\exists$ vz. V de $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ e uma função $\eta: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ab., tais que:

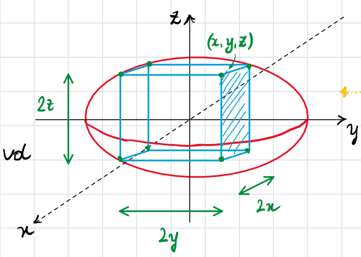
$f(x,y,z) = 0$ em $W \Leftrightarrow y = \eta(x,z)$

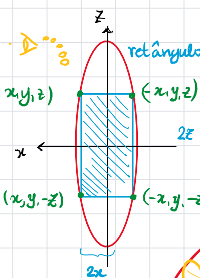


Sejam a, b e c números positivos. Calcule o volume da maior caixa (com faces paralelas aos planos coordenados) cujos vértices estão no elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Apresente os cálculos utilizados.

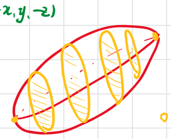
$\quad\quad\quad\quad\quad = g(x,y,z)$

maximizar $f(x,y,z) = $ vol





retângulo paralelo ao plano xz
⇓
corta o elipsoide numa elipse



planos paralelos (da forma $y = k$) "fatiam" o elipsóide em elipses

$T(x,y,z) = (ax, by, cz)$

$E \subset \mathbb{R}$

$\text{vol}[T(E)] = abc \, \text{vol}(E)$

$\text{vol}(E) = \iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz$

TMV:

$$\iiint_{T(E)} f(y)\,dy = \iiint_E f(T(x)) \underbrace{|\det DT(x)|}_{abc} dx$$

Prova rigorosa em Calc. VI (Calc. Integral)

(x,y,z) = vértice da caixa no 1° oct.

$$\begin{cases} f: (\mathbb{R}^3)^+ \to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) = \text{vol} = (2x)(2y)(2z) = 8xyz \\ g(x,y,z) = 0, \text{ onde} \\ g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\nabla f = \lambda \nabla g$
Lagrange