IME-USP

MAT0315 - Introdução à Análise
Prática Como Componente Curricular

Nomes		Nº USP	
	Camila do Carmo dos Santos		11298549
	Mariana Nabhan Francisco		10851882
	Yrlla Mariana Vieira de França		11276412

Tema: Séries Geométricas e Aplicações

As séries infinitas surgem já nos primeiros anos de ensino da matemática, como, por exemplo, nas dízimas periódicas:

Figura 1: Dízima periódica

$$0,777... = 7 \times 0,111... = 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right)$$

$$7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = 7\left(\frac{1/10}{1-1/10}\right) = \frac{7}{9},$$

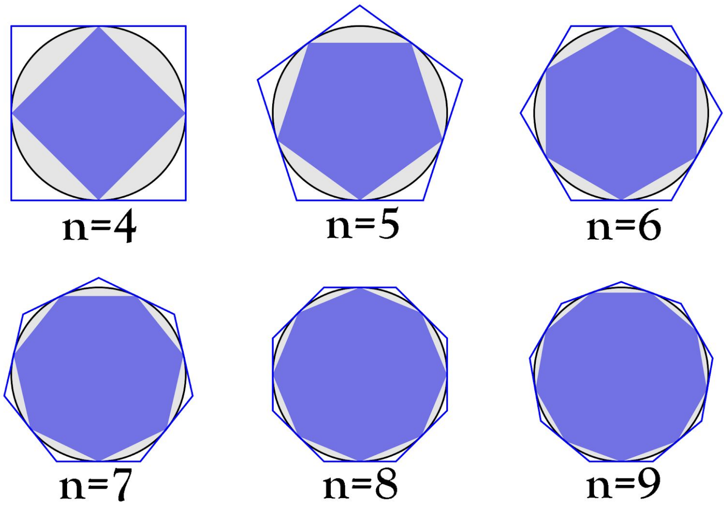
Fonte: RPM 31

Entretanto, o primeiro aparecimento das séries geométricas foi no cálculo da área da quadratura de uma parábola, realizado por Arquimedes no século III a.C numa carta enviada ao seu amigo Dositeu. A mesma possui 24 proposições sobre parábolas, sendo uma delas a respeito da área.

Arquimedes é considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos, de acordo com Ávila no artigo da RPM 31 (Revista do Professor de Matemática). Em seus cálculos é possível notar os passos iniciais para o que conhecemos hoje como Cálculo Integral.

Em relação ao cálculo da área de um segmento da parábola, Arquimedes utiliza o método da exaustão em uma de suas demonstrações. O método é utilizado para calcular a área de figuras por meio da inscrição e circunscrição de sequências de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Por exemplo:

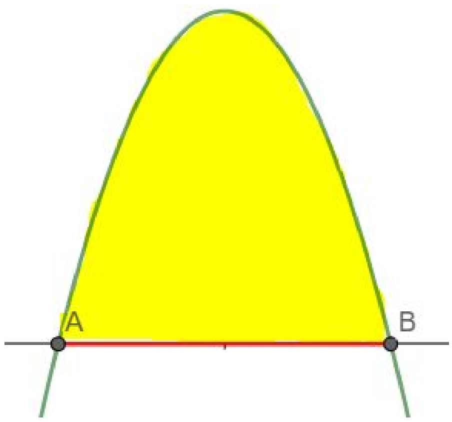
Figura 2: Método de exaustão



Fonte: Blog Atitude Reflexiva

Nota-se, nessa figura, que as áreas dos polígonos inscritos (em azul escuro) e circunscritos (brancos de borda azul) convergem para a área do círculo."
Analogamente Arquimedes utilizou o método da exaustão para calcular a área da parábola. Primeiramente, traçamos um segmento $\overline{AB}$ retilíneo que passa por dois pontos da parábola, delimitando a região entre $\overline{AB}$ e o arco da parábola (Figura 3).

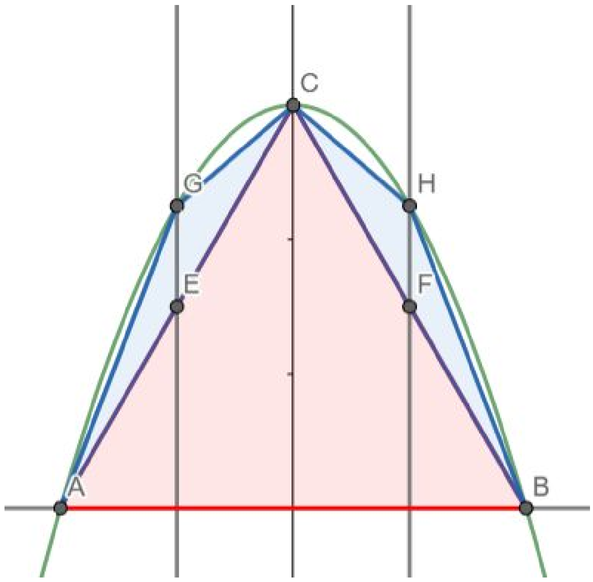
Figura 3: Parábola



Fonte: próprios autores

Arquimedes, por sua vez, pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$, traça uma reta perpendicular - que, neste caso, coincidirá com eixo de simetria da parábola -, e o encontro desta reta com a parábola é o ponto C. Sendo assim, temos o triângulo $\triangle ABC$. Faremos o mesmo para os lados do triângulo BCH, de tal modo que H é o encontro da perpendicular em relação a $\overline{AB}$ que passa por F (ponto médio de $\overline{BC}$). Da mesma maneira, repetimos o processo nos demais lados dos novos triângulos obtidos exaustivamente.

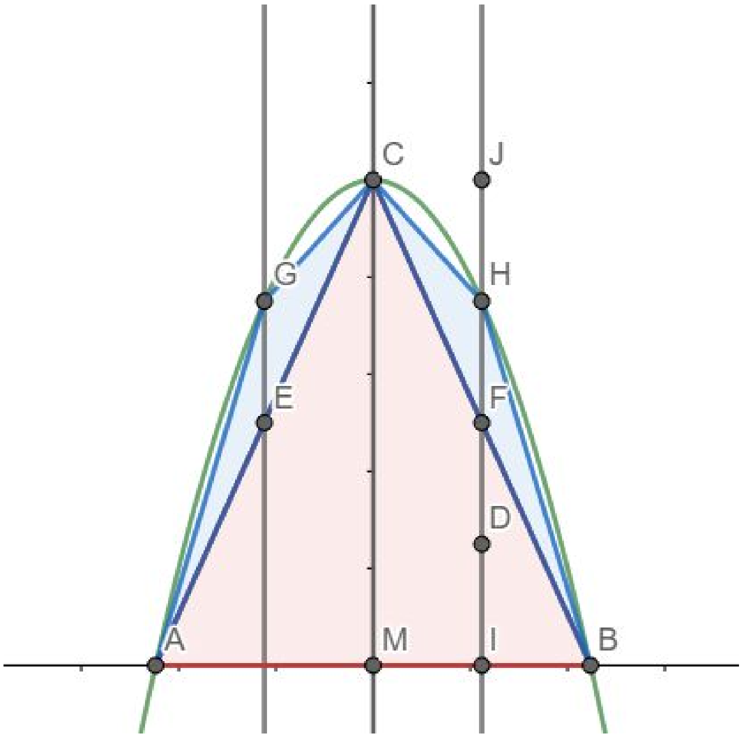
Figura 4: Triângulos inscritos



Fonte: próprios autores

Portanto, para sabermos a área da parábola, basta calcularmos a soma das áreas dos triângulos inscritos. Desta maneira, como podemos observar na figura 5, nota-se que as alturas dos triângulos $\triangle ACG$ e $\triangle BCH$ são iguais, uma vez que o ponto E é oposto de F e, também, G é oposto de H - pela simetria da parábola. Ademais, a área dos triângulos obtidos na primeira etapa valem 1⁄4 da altura do triângulo ABC, na segunda valerão ⅛ e assim por diante. Pois sendo I o ponto médio de MB e H ponto da parábola, então $\frac{CM}{JH} = \frac{MB^2}{MI^2} = 4,\ pois\ MI = \frac{1MB}{2}$. O mesmo resultado obtemos para o triângulo do lado oposto, pela simetria da parábola.

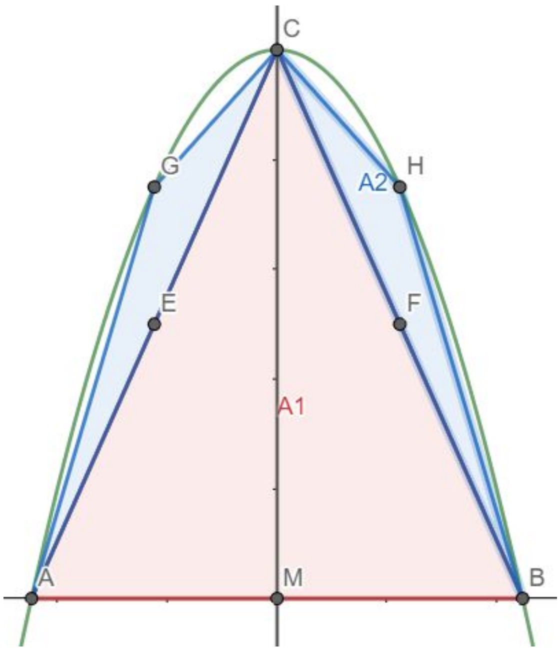
Figura 5: Altura dos triângulos



Fonte: próprios autores

Os triângulos $\triangle ACG$ e $\triangle BCH$ possuem a mesma base - $\overline{AM}$ possui mesma medida de $\overline{MB}$ - e mesma altura, logo mesma área. Calculando as areas dos triangulos, temos:

Figura 6: Área dos triângulos



Fonte: próprios autores

Chamaremos de "d" a distância de M (ponto médio de AB) até B e "h" a medida de MC, daí: $A1 = \frac{d.h2}{2}$ = d.h.

De modo análogo: $A2 = \frac{d.h}{8}$, pois a altura do triângulo $\triangle ACG$ é ¼ da altura de $\triangle ABC$.

Prosseguimos com o mesmo raciocínio para os demais triângulos e obtemos a expressão para área total: $A_T = A1 + 2(A2) + 4(A3) + \ldots = d.h + \frac{2d.h}{8} + \frac{4d.h}{64}$ e, como $A1 = d.h \Rightarrow A_T = A1 + \frac{1}{4}(A1) + \frac{1}{16}(A1) + \ldots$

Colocando $A1$ em evidência, obtemos: $\Rightarrow A_T = A1\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots)$. Sendo assim, observe que temos uma série geométrica de razão ¼ e, como a razão é menor que 1, a série converge para 4/3.

$r = \frac{1}{4},\ a = 1,\ logo\ S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow A_T = A1\,\frac{4}{3}$

Por fim, Arquimedes comparou a área de uma parábola a área do primeiro triângulo inscrito. Ademais, notamos a realização de um cálculo de área em que aparece a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$.

Ensino

Está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais o ensino de conteúdos como: séries numéricas, progressões e sequências, para alunos do primeiro ano do ensino médio. Os objetivos que cercam esses conteúdos abrangem tanto entender e visualizar padrões quanto processos de contagem.

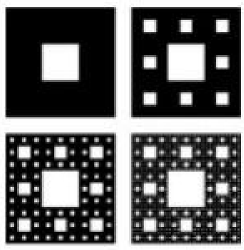
Vale salientar que o conteúdo de séries envolve um universo de comparações, padrões, somas, contagem etc. Ademais, tal conteúdo que está presente em muitas áreas de nosso cotidiano – principalmente na área tecnológica - nota-se, assim, a importância das séries e seu ensino.

Entretanto, muitos alunos têm a matemática como uma matéria “chata” e que não servirá para nada em suas vidas. Talvez isso ocorra pelo modo como são apresentados à matemática, algo simplesmente “burocrático” e sem importância na sociedade. Desta maneira, apresentar a matemática de modo mais exploratório, ou seja, mostrando o quão vasta e importante ela é, possa contribuir para despertar interesse nos alunos. De acordo com D’Ambrosio (1999) alguns aspectos são importantes em relação ao ensino da matemática:

> *“O aspecto crítico, que resulta de assumir que a Matemática que está nos currículos é um estudo de matemática histórica, e partir para um estudo crítico do seu contexto histórico, fazendo uma interpretação das implicações sociais dessa matemática. Sem dúvida isso pode ser mais atrativo para a formação do cidadão. O aspecto lúdico associado ao exercício intelectual, que é tão característico da matemática, e que tem sido totalmente desprezado. Porque não introduzir no currículo uma matemática construtiva, lúdica, desafiadora, interessante, nova e útil para o mundo moderno. O enfoque histórico favorece destacar esses aspectos, que considero fundamentais na educação matemática”. (p. 270)*

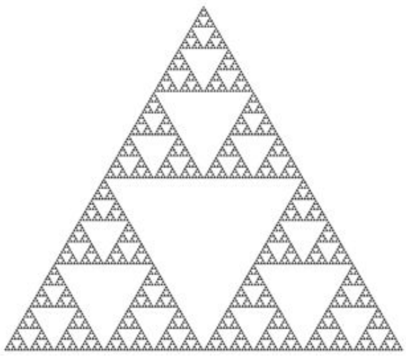
Sendo assim, tratar de séries de um modo que agregue os aspectos citados por D’Ambrosio (1999), torna o processo de ensino-aprendizagem das mesmas mais atrativo. Consideramos, portanto, que abordar assuntos como “Triângulo de Sierpinski” ou “Tapete de Sierpinski" é importante, uma vez que os fractais possuem relação com as séries geométricas e possuem aspectos interessantes e, até mesmo, lúdicos. Os fractais são famosos na internet e possuem diversas representações animadas – em programas computacionais – e formas. Aproximando o tema das séries geométricas, pode-se abordar em sala como calcular a área do “Triângulo de Sierpinski” ou do “Tapete de Sierpinski", por exemplo. Sendo assim, nota-se a “junção” de conteúdos diversos que estão relacionados com as séries geométricas.

Figura 7: Tapete de Sierpinski



Fonte: Wikipedia

Figura 8: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Wikipedia

Em outra atividade, utilizando o Tapete de Sierpinski , o professor pode propor aos alunos, calcular qual seria a área desses novos quadrados que vão surgindo na figura e mostrar que a soma de suas áreas é igual a área do quadrado original.
Além disso, o professor pode abordar o cálculo da quadratura da parábola utilizando o método da exaustão, uma vez que o assunto envolve uma perspectiva histórica e aborda conteúdos que vão desde semelhanças de triângulos à séries geométricas. D’Ambrosio (1999) cita a importância de abordarmos a matemática num contexto histórico, pois, desta maneira, apresentamos aos alunos a importância da matemática ao longo da história e como tais eventos foram e são cruciais para todo

o avanço em diferentes áreas. Portanto, agregando a aplicação e história da matemática em sala, pode-se inovar o ensino das séries geométricas, além de despertar a curiosidade nos alunos acerca da matemática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Ainda as séries geométricas**. RPM 31.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Introdução. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Matemática. Terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998

BROLEZZI, A. C. Cap.: **Raízes do Cálculo na Grécia Antiga Antiga.** Trecho do livro Revista da Pesquisa & Pós Graduação - Ano 1. Vol 1 - Jan./Jun. 1999. Acesso em: 30 nov. 2020

O Método da exaustão e o surgimento da constante Pi. Blog Atitude Reflexiva. 2016. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-%CF%80/> Acesso em: 15 dez. 2020

CONTADOR, P. R. M. **Arquimedes, o mito e sua obra**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

SANTOS, J. M. **Quadratura da Parábola: Uma Abordagem Possível para o Ensino de Somas de Infinitos**. Trabalho de conclusão de Mestrado em Matemática. Disponível em < JosieldesMarquesDosSantos_DISSERT.pdf (ufrn.br)> Acesso em: 30 nov. 2020

SILVA, A. P. R. C. **Cálculo de Áreas no Ensino Médio**. Florestal, MG - 2017. Disponível em Acesso em: 30 nov. 2020

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.