Universidade de São Paulo

A parte periódica de certos números racionais

(RPM 79)

Integrantes do Grupo:

- Cleidson Matheus
- Lucca Christian
- Victor Antunes

São Paulo

2020

A propriedade escondida nas dízimas...

Neste trabalho iremos apresentar uma propriedade curiosa sobre parte periódica de certos números racionais, aqueles que muitas pessoas não param para analisar, pois os mesmos aparentam ser somente uma dízima periódica. Essa propriedade que desperta a curiosidade em um setor da matemática encontra-se na Revista do Professor de Matemática (RPM) edição 79 com título Sobre a parte periódica de certos números racionais dos autores Valdair Bonfim e Lúcia Resende Pereira.

Introdução ás frações

Certas frações possuem uma parte periódica que apresentam uma lógica fácil de entender, como as frações abaixo com o denominador 3, veja alguns exemplos:

$\frac{1}{3} = 0,333 \ldots$ $\frac{2}{3} = 0,666 \ldots$ $\frac{3}{3} = 0,999 \ldots = 1$

$\frac{4}{3} = 1,333 \ldots$ $\frac{5}{3} = 1,666 \ldots$ $\frac{6}{3} = 1,999 \ldots = 2$

$\frac{7}{3} = 2,333 \ldots$ $\frac{8}{3} = 2,666 \ldots$ $\frac{9}{3} = 2,999 \ldots = 3$

Analisando os exemplos acima, podemos observar que 3, 6 e 9 são sempre os números que se repetem na divisão por 3, não importando o numerador, e que todos os números que se repetem (parte periódica) são divisíveis por 3, vejo só:

$\frac{9}{3} = 3;$ $\frac{6}{3} = 2;$ $\frac{3}{3} = 1$

Será que existe alguma lógica ou propriedade se o denominador não for múltiplo de 3? Vamos ver abaixo alguns casos de dízimas periódicas com denominadores aleatórios.

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ 142857 \ldots \quad \rightarrow \quad Parte\ periódica = 142857$$

$$\frac{1}{11} = 0,09\ 09\ 09\ 09\ 09\ 09\ 09\ 09 \ldots \quad \rightarrow \quad Parte\ periódica = 09$$

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\ 076923\ \ldots \qquad \rightarrow \qquad Parte\ periódica = \ 076923$$

$$\frac{1}{22} = 0{,}0\ 45\ 45\ 45\ 45\ 45 \ldots\ \ldots \qquad \rightarrow \qquad Parte\ periódica = \ 45$$

Podemos perceber que a parte periódica de cada um desses exemplos é divisível 9:

$\frac{09}{9} = 1;$ $\frac{142857}{9} = 15873;$ $\frac{076923}{9} = 8547;$ $\frac{45}{9} = 5$

Será que essa divisão por 9 também vale se o numerador for diferente de 1?

$$\frac{14}{55} = \ 0{,}2\ 54\ 54\ 54\ 54\ 54\ 54\ 54 \ldots \qquad \rightarrow \qquad Parte\ periódica = 54$$

$$\frac{457}{3700} = 0{,}12\ 351\ 351\ 351\ \ \ldots \qquad \rightarrow \qquad Parte\ periódica = 351$$

$$\frac{45}{143} = 0{,}3\ 146853\ 146853\ \ \ldots \qquad \rightarrow \qquad Parte\ periódica = 146853$$

Analisando a parte periódica de cada uma dessas frações, temos que:

$\frac{54}{9} = 6;$ $\frac{351}{9} = 39;$ $\frac{146853}{9} = 16317$

Com isso, vemos que apesar dos denominadores não serem divisíveis por 3 e o numerador diferente de 1, ainda existe uma propriedade para esses tipos de frações, em que a parte periódica continua sendo divisível por 9.

E isso nos leva às seguintes perguntas que alunos curiosos podem vir a questionar:

- Como sabemos que isso vale para todos os números?
- Como sabemos que não é somente uma coincidência?
- Será que demos sorte e escolhemos números que a parte periódica é múltiplo de 9?
- Para provar que funciona em todos os números, alguém precisa ficar testando?

Demonstração da propriedade

Vamos considerar um número racional z representado na forma decimal infinita e periódica. Para isto, vamos supor inicialmente que z = m/n, com m e n sendo inteiros, n não divisível por 3 e 0 < m < n.

A representação decimal de z será da seguinte forma:

$z = 0, a_1 \ldots a_j \overline{b_1 \ldots b_k}$, onde $a_1 \ldots a_j\ b_1 \ldots b_k$ são os algarismos da parte não inteira.

$$(1) \quad 10^j z = a_1 \ldots a_j, \overline{b_1 \ldots b_k}$$

$$(2) \quad 10^{k+j} z = a_1 \ldots a_j\, b_1 \ldots b_k, \overline{b_1 \ldots b_k}.$$

Pelo fato da parte não inteira dos dois últimos números ser a mesma, ao subtrairmos (1) de (2) chegamos a:

$$(3) \quad (10^{k+j} - 10^j)\, z = a_1 \ldots a_j\, b_1 \ldots b_k - a_1 \ldots a_j.$$

Denote por $N = a_1 \ldots a_j$ e $R = b_1 \ldots b_k$. Note que isso não se trata dos algarismos $b_1 \ldots b_k$ e $a_1 \ldots a_j$, mas sim dos números inteiros que juntos esses algarismos representam. Por exemplo, na função abaixo temos:

$$\frac{45}{143} = 0{,}3\ 146853\ 146853\ \ \ldots$$

Neste exemplo, N = 3 e R = 146853.

Com essa notação a igualdade (3) pode ser escrita da forma:

$$10^j(10^k - 1)z = 10^k N + R - N$$

$$10^j(10^k - 1)z = (10^k - 1)N + R$$

$$(10^k - 1)[10^j z - N] = R$$

Como z = m/n, ficamos com $(10^k - 1)[10^j(m/n) - N] = R$.

Multiplicando ambos os lados por n, temos:

$$(10^k - 1)[10^j m - nN] = nR.$$

Sabemos que $(10^k - 1)$ é divisível por 9, então nR também é divisível por 9. Como por hipótese n não é divisível por 3, então 3^2 aparece na fatoração em primos de R, ou seja, a parte periódica de z é divisível por 9.

Provando assim, que R é divisível por 9.

Observações

Observação 1: Isto que provamos também funciona para números racionais cuja a representação seja finita, desde que a interpretação desse número seja considerando ele infinito, com uma infinidade de zeros. Nesse caso a parte periódica seria 0, que também é divisível por 9 (oque não podemos é ter 0 no denominador).

$\frac{2}{5} = 0{,}40000000\ldots$ $\rightarrow$ Parte periódica: $\frac{0}{9} = 0$

Conclusão

Baseado nas demonstrações acima e no nível teórico em que foi abordado o passo a passo para provar tal propriedade, vemos que nem tudo pode ser simplesmente "apresentado" em sala de aula, afinal, apesar de não haver grande complexidade no desenvolvimento do raciocínio, esses conhecimentos são para os alunos um incentivo a desvendar mistérios e descobrir novas aplicações que não são tão aparentes quando estamos fazendo conta.

Por isso, a secção desta revista que seria bom ser abordada em ambiente escolar é a ideia de que existe uma lógica por detrás dessa definição de dízima, é algo infinito e periódico, mas também possui propriedades que podem ser apresentados simplesmente com exemplos, e caso esses exemplos capturem a atenção da turma, aí sim, poderá ingressar no âmbito teórico, pois terão a visualização do que queremos com essa demonstração.

O fato de saber que a parte periódica de frações com denominador não divisível por 3 é divisível por 9 não tem nada de extraordinário, mas ao provar isso o professor cria oportunidade para revisitar tópicos importantes ensinados em outras situações, como o algoritmo da divisão euclidiana e o Teorema Fundamental da Aritmética, segundo o qual todo número natural pode ser decomposto num produto de fatores primos, de maneira única a menos da ordem dos fatores.

Além disso, dá-se ao aluno a chance de vivenciar uma dinâmica comum da Matemática, descrita abaixo pelos seguintes passos:

Problema → Especulações → Conjectura → Prova → Teorema → Solução do Problema