GRUPO 8 - UMA PROPRIEDADE CURIOSA DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS (RPM 66)

Felipe Affonso - N. USP 6552546

Nicodemos - N. USP 10734821

Matheus L de Araújo - N. USP 10693552

Yasmin Ferreira de Araújo - N. USP 9865144

Introdução:

O artigo da RPM 66 trata de uma propriedade sobre dízimas periódicas cujo período possui uma quantidade par de algarismos. A propriedade mostra que para todo número da forma $\frac{p}{q}$, com *q* primo diferente de 2 e 5 e também *p* e *q* primos entre si, sendo o comprimento do período da dízima um número par, se dividirmos o conjunto de algarismos do período em dois ou mais grupos de mesmo comprimento a soma desses grupos sempre será um número formado somente pelo algarismo 9.

O Teorema de Midy revela uma daquelas propriedades matemáticas que, à primeira vista, parecem imperceptíveis, mas que demonstram a riqueza dos números. Nesse teorema podemos encontrar uma relação entre os números primos e frações.

Considere uma fração, já reduzida, em que o numerador é um número natural e o denominador é um número primo diferente de 2 ou 5. Nesse caso, a expressão decimal da fração será uma dízima.

i) $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ *ii)* $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ *iii)* $\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$

Até aqui nada de especial parece acontecer, mas se o período da dízima tiver um número par de algarismos, então ele pode ser dividido em duas partes com uma propriedade muito notável:

i) $142 + 857 = 999$

ii) $076 + 923 = 999$

iii) $05882352 + 94117647 = 999999999$

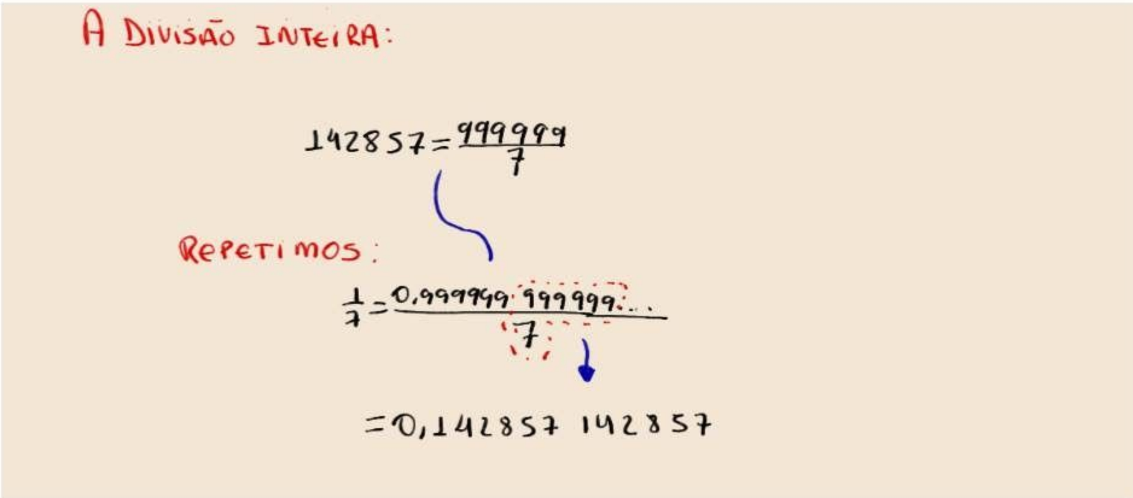
Agora algo acontece, a propriedade fica mais evidente, a soma dos números obtidos por meio das dízimas a soma possui somente nove em seus algarismos. Essa é a propriedade descrita no teorema de Midy: Se você dividir o período de uma fração (como as descritas acima) em duas partes de *n* algarismos, a soma desses números formados com essas partes será um número composto por *n* algarismos nove.

DECIMAIS DE UMA FRAÇÃO

Primeiro vamos analisar os decimais de uma fração $\frac{1}{p}$, onde *p* é um número primo diferente de 2 e 5. Como esse número tem uma expansão decimal pura, vale a pena escrever o numerador como 0,999… e interpretar a fração como se fosse uma divisão. Por exemplo, para o número $\frac{1}{7}$ nós teríamos:

$$\frac{0,\overline{999999}}{7} = 0,\overline{142857}.$$

Agora, como os dois lados da igualdade são números periódicos, são mais fáceis de comparar: é como repetir a divisão $\frac{999999}{7}$ infinitas vezes.



Isso revela várias coisas: a primeira é uma relação entre o período da fração e o número primo: 142857 x 7 = 999999. A segunda (que se tornará mais importante posteriormente) é que o número 7 não divide um número inferior a nove. Ou seja, as divisões $\frac{9}{7}$, $\frac{99}{7}$, $\frac{999}{7}$, $\frac{9999}{7}$, $\frac{99999}{7}$ não são exatas. A primeira vez que a divisão $\frac{9...99}{7}$ é exata, você não tem escolha a não ser saber a duração do seu período. Assim, podemos repetir o resultado indefinidamente, periodicamente.

Claro que isso deve funcionar para outros números que não sejam o 7. E, de fato, podemos verificar que qualquer primo p tem um múltiplo que consiste apenas de nove em seus algarismos. Quantos noves tanto quanto os números têm período de $\frac{1}{p}$. Um exemplo é: $76923 \times 13 = 999.999$.

Recordando a dízima de $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, em que o conjunto de algarismos 142857 se repete, tratando-se, portanto, de uma dízima infinita periódica de período

142857, no qual seu comprimento é 6. Dividindo o conjunto de algarismos em dois números de mesmo comprimento, obtemos 142 e 857. Se os somarmos, teremos $142+857=999$. Deste modo, obtemos um número formado apenas com o algarismo 9. A analogia desse resultado se mantém verdadeira para todo o número da forma $\frac{p}{q}$, com q primo, $q \neq 2$ e $q \neq 5$ e também $mdc(p,q)=1$, se o comprimento do período da dízima $\frac{p}{q}$ é um número par. Assim, acabamos de apresentar o Teorema de Midy. Esse resultado foi publicado em 1830 pelo matemático francês E. Midy, mas ficou esquecido até ser redescoberto em 2004 por Brian Ginsberg, quando também foi generalizado.

Enunciado do Teorema de Midy: Seja p um inteiro positivo, q primo diferente de 2 e 5, p e q primos entre si e $p < q$. Seja s a ordem de 10 módulo q e s = 2s′, com s′ inteiro positivo, então tem-se que $\frac{p}{q}=0,(u_1 u_2)$, em que $u_1 = a_1 a_2 \cdots a_{s'}$ e $u_2 = a_{s'+1} a_{s'+2} \cdots a_{2s'}$, com $0 \leq a_i < 10$, para qualquer $1 \leq i \leq 2s'$ e $u_1 + u_2 = 10^{s'} - 1$.

Teorema: Se $mdc(n,a)=1$ e $n|ab$, então $n|b$. Em particular, se p é primo e $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$. (Este teorema será utilizado na demonstração do Teorema de Midy)

Demonstração Formal do Teorema de Midy

Suponhamos que $\frac{p}{q}$ tem um período de comprimento $s=2s'$ e, portanto, $\frac{p}{q}=0,(u_1 u_2)$, sendo (*u1u2*) uma representação da dízima periódica dividida em duas partes com o mesmo número de algarismos. Multiplicando por $10^{s'}$ temos $10^{s'} \cdot \frac{p}{q} = u_1, u_2 u_1$.

O denominador q não divide $10^{s'}-1$ porque s é o menor inteiro positivo tal que $10^s \equiv 1 \; mod \, q$, portanto, $q \mid 10^s - 1$ e $s' < s$.

Sendo $10^{2s'} - 1 = (10^{s'}-1)\cdot(10^{s'}+1)$ e $mdc(q, 10^{s'}-1)=1$ então usando o teorema $q|10^{s'}+1$, donde $(10^{s'}+1) \equiv 0 \; mod \, q$.

Adicionando, $\frac{p}{q} + 10^{s'} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(10^{s'}+1)\cdot p}{q}$ utilizando o resultado anterior, que $(10^{s'} + 1) \equiv 0 \ mod \ q$, concluímos que é inteiro, isto é, que $0,(u_1 u_2) + 0,(u_2 u_1)$ é inteiro. Esta soma fica compreendida entre 0 e 2, exclusivamente.

Deste modo, temos $0,(u_1 u_2) + 0,(u_2 u_1) = 1$. Como,

$$0,(u_1 u_2) = u_1(10^{-s'} + 10^{-3s'} + 10^{-5s'} + \cdots) + u_2(10^{-2s'} + 10^{-4s'} + 10^{-6s'} + \cdots)$$

$$0,(u_2 u_1) = u_2(10^{-s'} + 10^{-3s'} + 10^{-5s'} + \cdots) + u_1(10^{-2s'} + 10^{-4s'} + 10^{-6s'} + \cdots)$$

logo,

$$0,(u_1 u_2) + 0,(u_2 u_1) = (u_1 + u_2) \times 10^{-s'} \times (1 + 10^{-s'} + 10^{-2s'} + 10^{-3s'} + \cdots) = 1$$

Como, $1 + 10^{-s'} + 10^{-2s'} + 10^{-3s'} + \cdots = \frac{1 - \lim_{i\to+\infty} 10^{-is'}}{1-10^{-s'}} = \frac{1}{1-10^{-s'}}$, obtemos, $\frac{(u_1+u_2)}{1-10^{-s'}} \cdot 10^{-s'} = 1$, o que finalmente fica:

$$u_1 + u_2 = \frac{1-10^{-s'}}{10^{-s'}} = 10^{s'} - 1$$

OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE MIDY

CONJECTURA 1: Seja p um número primo, $p \neq 2$ e $p \neq 5$. Suponha que $\frac{1}{p}$ seja um dízima periódica cujo período tem um número par de casas decimais ($2 \cdot n$).

Se r_i e s_i são tais que $0 < r_i < p$, $0 < s_i < p$ e $r_i + s_i = p$ e se $10 \cdot r_i = q_i \cdot p + r_{i+1}$; $10 \cdot s_i = t_i \cdot p + s_{i+1}$ ($0 < s_j < p$) então $q_i + t_i = 9$. ($i = 1, 2, ..., n-1$)

DEMONSTRAÇÃO (CONJECTURA 1):

$10 \cdot r_i = q_i \cdot p + r_{i+1}$ (1)

$10 \cdot s_i = t_i \cdot p + s_{i+1}$ (2)

(1) + (2): $10(r_i + s_i) = (q_i + t_i) \cdot p + (r_{i+1} + s_{i+1})$ **(*)**

Por hipótese, $r_i + s_i = p$.

Portanto, **(*)** fica:

$10p = (q_i + t_i) \cdot p + (r_{i+1} + s_{i+1})$ **(**)**

$\Rightarrow r_{i+1} + s_{i+1}$ é múltiplo de p.

Como são números entre 0 e p $(0 < r_{i+1}, s_{i+1} < p)$ podemos concluir que $r_{i+1} + s_{i+1} = p$.

Voltando em **(**)** temos:

$10p = (q_i + t_i)p + p$

$\Leftrightarrow 9p = (q_i + t_i)p$

$\Rightarrow q_i + t_i = 9$

Como queríamos demonstrar.

CONJECTURA 2: $s_1 = p - 1$ sempre ($\Leftrightarrow 10 \cdot r_n = q_n \cdot p + (p-1)$)

e

$10 \cdot s_n = t_n \cdot p + 1$ (recomeço!)

COROLÁRIO DA DEMONSTRAÇÃO: Se $r_i + s_i = p$ então $r_{i+1} + s_{i+1} = p$.

<u>A conjectura 2 não será demonstrada</u>.

Alguns exemplos em que o teorema de Midy ocorre:

1) $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$; $\frac{2}{11} = 0,\overline{18}$; $\frac{3}{11} = 0,\overline{27}$, então $0 + 9 = 9$; $1 + 8 = 9$; $2 + 7 = 9$;
2) $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$; $\frac{2}{13} = 0,\overline{153846}$, então $076 + 923 = 999$; $153 + 846 = 999$;
3) $\frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647}$, então $05882352 + 94117647 = 99999999$;
4) $\frac{2}{17} = 0,\overline{1176470588235294}$, então $11764705 + 88235294 = 99999999$.

Ao considerarmos, novamente, a dízima de $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, com a qual, anteriormente, verificamos que o comprimento do seu período é divisível por 2, constatamos que é também divisível por 3. Desta forma, se “partirmos” o conjunto de algarismos 142857 em três números com o mesmo comprimento, ou seja, 14, 28 e 57 e os adicionarmos temos $14 + 28 + 57 = 99$.

CONCLUSÃO

Não é necessário ter muito conhecimento - avançado - em matemática para que o Teorema de Midy possa ser compreendido, o que torna tranquilamente possível sua introdução do tema com alunos que estão no oitavo ano, nono ano do ensino fundamental II ou no ensino médio como uma curiosidade sobre as dízimas periódicas. Ao desenvolver o teorema com os alunos que se encontram nesses níveis não recomendamos uma demonstração formal, a construção desse tema pode ser desenvolvida através de uma “mostração” com alguns exemplos que indiquem que a propriedade sempre será verdadeira se os pré requisitos do teorema forem atendidos.

Há pouca informação a respeito do teorema de Midy na internet e nos livros, em geral como uma nota de rodapé. Os conteúdos existentes não exploram ou mesmo indicam alguma finalidade específica para o mesmo, o abordando mais como uma curiosidade sobre o período de dízimas periódicas que cumprem as prerrogativas do teorema.

O Teorema de Midy visto de maneira isolada acaba não oferecendo muito mais que uma excentricidade sobre o tema, porém acaba sendo utilizado na teoria dos números e nos números cíclicos em conjunto com outras propriedades para mostrar várias peculiaridades sobre os números. Como esse tópico não é o objetivo deste texto, deixamos como adendo, na bibliografia, um vídeo sobre os números cíclicos onde o Teorema de Midy é utilizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PIRES, FRANCISCO SANTOS TEIXEIRA. **Representação dos números na forma decimal e generalização a outras bases**. 2013. 87 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) - Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013.

El teorema de Midy y las fracciones de primos. Lemnismath. Disponível em: <https://lemnismath.org/2020/08/teorema-de-midy/>. Último acesso em: 01 de dezembro de 2020, às 14:42.

Números cíclicos, una glosina matemática. Lemnismath. Disponível em : <https://lemnismath.org/2019/08/numeros-ciclicos/>. Último acesso em : 02 de dezembro de 2020, às 19:14

El patrón secreto de los números que nunca te habían contado. Lemnismath. Disponível em : <https://www.youtube.com/watch?v=QuxhYXVCz5w&t=1s&ab_channel=Lemnismath>. Último acesso em : 02 de dezembro de 2020, às 19:00

Uma curiosa propriedade das dízimas periódicas. RPM 66. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/66/9.html>. Último acesso em: 02 de dezembro de 2020, às 19:00