TRABALHO DE PCOC - MAT0315 INTRODUÇÃO À ANÁLISE

Kenji Sagutti - 10298700

Roberto Paulichi Junior - 10298648

Victor Bonaldo - 10298750

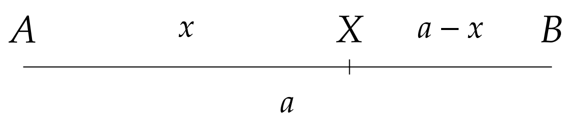
O Número de Ouro

Divisão em média e extrema razão. Esse foi o nome dado a uma construção específica em “Os Elementos” de Euclides. A ideia por trás dessa construção, descrita por Kepler como um dos grandes “tesouros” da geometria, é o que dá embasamento a toda uma teoria para construir o que conhecemos hoje principalmente por *número de ouro.*

Este trabalho pretende abordar as particularidades do pentágono regular, polígono no qual é possível observar a presença da razão áurea ao relacionar, por exemplo, uma diagonal e um lado do pentágono. Para os propósitos deste trabalho faremos uso das seguintes notações:

- $\overleftrightarrow{PQ}$ representa a única reta euclidiana determinada pelos pontos P e Q;
- $\overline{PQ}$ denota o segmento de reta cujas extremidades são os pontos P e Q ($\overline{PQ}$ = {X ∈ $\overleftrightarrow{PQ}$/ P - X - Q});
- PQ é a medida do segmento $\overline{PQ}$, ou seja, a distância euclidiana entre os pontos P e Q.

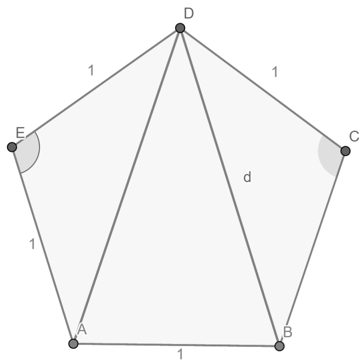
Segue a definição dada por Euclides: *“Uma linha reta se diz dividida em extrema e média razão, quando toda a linha é para o segmento maior, como este segmento maior é para o segmento menor”.* Mais precisamente, tome um ponto X pertencente a $\overline{AB}$, com $BX < AX$ de forma que $\frac{AB}{AX} = \frac{AB}{AX}$, então, X divide $\overline{AB}$ na razão áurea.



Suponha que $AB = a$ e que $AX = x$, com a, $x \in \mathbb{R}^+$. Logo, $XB = a - x$ e, portanto: $\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x} \implies x^2 + ax - a^2 = 0$. Como x é uma medida do segmento AX, x deve ser positivo.

Portanto, das raízes da equação $x^2+ax-a^2=0$ obtemos $x = a\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (positiva) ou $x = a\cdot\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (negativa). Dessa forma, utilizaremos $x = a\cdot\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (positiva), pois x trata-se de um segmento e podemos calcular a razão áurea $\varphi = \dfrac{AB}{AX} = \dfrac{a}{x} = \dfrac{a}{a\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} =$ $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2\cdot(1+\sqrt{5})}{5-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A partir deste resultado, vamos explorar o pentágono regular e demonstrar a seguinte afirmação: Considere um pentágono regular ABCDE cujos lados medem 1. Então sua diagonal tem medida igual ao número de ouro.



Para prosseguir vamos assumir alguns resultados já conhecidos da geometria euclidiana sem demonstrá-los e sem nos preocuparmos com a ordem a qual foram originalmente obtidos. Da mesma forma, enunciamos certas definições que serão empregadas para o decorrer da demonstração. Seguem estes:

- Def. 1: um polígono é chamado **regular** quando possui todos os lados e ângulos internos com mesma medida;
- Def. 2: denominamos por **diagonal** o segmento de reta que une um vértice ao outro não consecutivo;
- Prop. 1: a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°;
- Prop. 2 (caso de congruência LAL): dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $AB = DE$, $med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{DEF})$ e $BC = EF$, então $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes;
- Prop. 3: Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da base têm a mesma medida. Em outras palavras, em um triângulo ABC vale AB=AC $\iff$ $med(\widehat{ABC}) = med(\widehat{ABC})$.

- Prop. 4: : Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele (Teorema do ângulo externo);
- Prop. 5 (caso de semelhança AA): Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes se possuem dois ângulos congruentes.
- Notação: $\widehat{EAB} = \widehat{A}$; $\widehat{ABC} = \widehat{B}$; $\widehat{BCD} = \widehat{C}$; $\widehat{CDE} = \widehat{D}$ e $\widehat{DEA} = \widehat{E}$

Traçamos as diagonais AB e BD em ABCDE, seccionando o pentágono nos triângulos $\triangle AED$, $\triangle ADB$ e $\triangle DCB$.

(i) Queremos encontrar a medida dos ângulos internos do pentágono.

$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) + med(\hat{E}) = med(\widehat{EAD}) + med(\widehat{DAB}) + med(\widehat{ABD}) + med(\widehat{DBC}) + med(\hat{C}) + med(\widehat{CDB}) + med(\widehat{BDA}) + med(\widehat{ADE}) + med(\hat{E})$

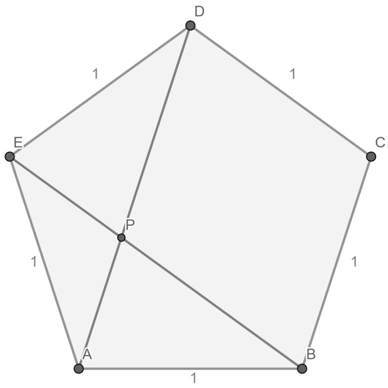
Rearranjando os termos: $(med(\hat{E}) + med(\widehat{ADE}) + med(\widehat{EAD})) + (med(\hat{c}) + med(\widehat{DBC}) + med(\widehat{CDB})) + med(\hat{C}) + med(\widehat{DBC}) + med(\widehat{CDB})$ Da prop. 1, obtemos: $med(\hat{A}) + med(\hat{B}) + med(\hat{C}) + med(\hat{D}) + med(\hat{E}) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ Finalmente, como o pentágono é regular $med(\hat{A}) = med(\hat{B}) = med(\hat{C}) = med(\hat{D}) = med(\hat{E}) = \dfrac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

(ii) Note que $AE = CD = 1$, $med(\hat{E}) = med(\hat{C}) = 108^\circ$ e $ED = CB$. Logo, pelo caso LAL de congruência de triângulos $\triangle AED \equiv \triangle DCB$. Por consequência, $med(\widehat{EAD}) = med(\widehat{CDB})$ e $AD = DB$. Pela prop. 1 e 3, é simples observar que $180^\circ = 108^\circ + 2 \cdot med(\widehat{EDA}) \Longrightarrow med(\widehat{EDA}) = med(\widehat{EAD}) = med(\widehat{BDC}) = med(\widehat{DBC}) = 36^\circ$

Generalizando, demonstramos que as diagonais que partem de um mesmo vértice de um pentágono regular seccionam o ângulo interno do mesmo vértice em três ângulos de medida igual a 36°.

Todas as diagonais do pentágono são congruentes porque o pentágono é regular. Vamos chamar a medida das diagonais de d.

Traçamos a diagonal $\overline{BE}$ e chamamos a intersecção de $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ de P.



Proposição: os triângulos $\triangle DEP$ e $\triangle PEA$ são isósceles.

Demonstração:

($\triangle PEA$).

O triângulo $\triangle ABE$ é isósceles, pois $AE = AB = 1$. Pela prop. 1 e 3 obtemos $180° = 108° + 2 \cdot med(\widehat{AEB}) \Longrightarrow med(\widehat{AEB}) = 36° = med(\widehat{AEP})$. De resultado anterior, $med(\widehat{EAD}) = 36° = med(\widehat{EAP})$ Como $med(\widehat{EAP}) = med(\widehat{AEP}) = 36°$, pela recíproca da prop. 3, vale que $\triangle PEA$ é isósceles.

($\triangle DEP$)

$med(\hat{E}) = med(\widehat{AEB}) + med(\widehat{BED}) \Longrightarrow med(\widehat{BED}) = 108° - 36° = 72°$. Pela prop. 4: $med(\widehat{EPD}) = med(\widehat{AEP}) + med(\widehat{EAP}) = 36° + 36° = 72°$. Como $med(\widehat{EPD}) = med(\widehat{DEP}) = 72°$, pela recíproca da porp.3, vale que $\triangle DEP$ é isósceles. Como $\triangle DEP$ é isósceles, $DE = DP = 1$. Daí $AD = AP + DP \Longrightarrow AP = d - 1$. Como $AP = PE$, então, $PE = d - 1$.

■

Proposição: Os triângulos $\triangle DAB$ e $\triangle DEP$ são semelhantes.

Demonstração:

$med(\hat{A}) = med(\widehat{EAD}) + med(\widehat{DAB}) \Longrightarrow med(\widehat{DAB}) = 108° - 36° = 72° = med(\widehat{DEP}$

Também sabemos que $med(\widehat{DEP}) = med(\widehat{ADB}) = 36°$. Pela prop. 5, como dois ângulos internos de ($\triangle DAB$) tê a mesma medida de dois ângulos onteros de ($\triangle DEP$), podemos afirmar que ($\triangle DAB$) e $\triangle DEP$) são semelhantes.

■

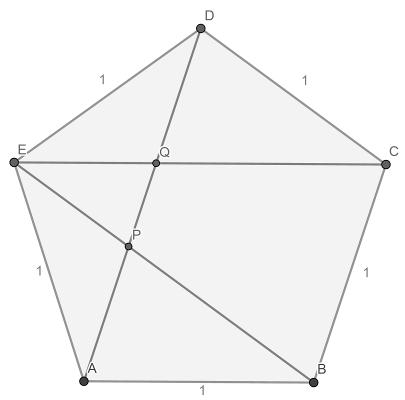
Desse resultado, como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais podemos afirmar que os lados de $\triangle DAB$ e $\triangle DEP$:

$\dfrac{DF}{DA} = \dfrac{EP}{AB} \Longrightarrow \dfrac{1}{d} = \dfrac{d-1}{1}$ de onde segue a equação quadrática $d^2 - d - 1 = 0$ cuja única raiz positiva é $d = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, ou seja, a diagonal do pentágono ABCDE de lado 1 tem tem medida igual ao número de ouro.

Além disso, podemos provar que o ponto P divide o segmento AD em média extrema razão: $\dfrac{AD}{DP} = \dfrac{d}{1} = \varphi$; $\dfrac{DP}{AP} = \dfrac{1}{1-d} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{5-1} = \varphi \Longrightarrow \dfrac{AD}{DP} = \dfrac{DP}{AP} = \varphi$.

Portanto, P divide $\overline{AD}$ em média e extrema razão.

Há ainda mais um segmento oculto no interior do pentágono onde podemos observar a razão áurea: trace a diagonal $\overline{CE}$ e chame de Q a intersecção de $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$. Vamos mostrar que o ponto Q divide o segmento $\overline{DP}$ em média e extrema razão.



Utilizando argumentos análogos aos apresentados anteriormente é simples provar que $\triangle AQE$ é isósceles e, mais do que isso, será congruente a $\triangle PEA$. Logo, $QE = PE = d - 1 \Longrightarrow \triangle EPQ$ é isósceles.

Além disso, como $BE = CE = d \Longrightarrow \triangle EBC$ é isósceles.

Proposição: os triângulos $\triangle EBC$ e $\triangle EPQ$ são semelhantes.

Demonstração:

Provamos anteriormente que as diagonais que partem de um mesmo vértice de um pentágono regular seccionam o ângulo interno do mesmo vértice em três ângulos de medida igual a 36°. Logo, $med(\widehat{BEC}) = med(\widehat{PEQ}) = 36°$.

Pela prop. 1 e 3, $med(\widehat{BEC}) + 2 \cdot med(\widehat{EBC}) = 180° \implies med(\widehat{EBC}) = 72°$. De forma análoga, obtemos que $med(\widehat{EPQ}) = 72°$ Pela prop. 5, como dois âmgulos internos de $\triangle EBC$ a mesma medida de dois ângulos internos de $\triangle EPQ$, podemos afirmar que $\triangle EBC$ e $\triangle EPQ$ são semelhantes. Isto posto, temos que:

$$\frac{EB}{EP} = \frac{BC}{PQ} \implies \frac{d}{d-1} = \frac{1}{PQ} \implies PQ = \frac{d-1}{d}, \text{ então, } QD = 1 - \frac{d-1}{d} = \frac{1}{d}$$

$$\frac{PD}{QD} = \frac{1}{\frac{1}{d}} = d = \varphi$$

$$\frac{QD}{PQ} = \frac{\frac{1}{d}}{\frac{d-1}{d}} = \frac{1}{d-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (1 - \sqrt{5})}{5-1} = \varphi$$

Portanto, $\frac{PQ}{QD} = \frac{OD}{PQ} = \varphi$, ou seja, Q divide PD em média extrema razão.

■

Mitos

O combate a mitos é igualmente importante no ensino do Número de Ouro. Alguns equívocos são muito comum ao se falar sobre Razão Áurea. A seguir podemos observar alguns exemplos.

O Partenon

Como George Markowsky apresenta em seu livro Misconceptions About The Golden Ratio, o Partenon não apresenta o número de ouro, ele diz que entusiastas usam vários lugares diferentes para tentar mostrar que tal razão.

No livro em questão o autor apresenta as medidas e suas razões, e realmente a razão áurea não aparece. Outro argumento usado por diferentes autores é baseado na data, o Partenon foi construído no século V a.C. enquanto Euclides, a quem se atribui a descoberta de tal razão, nasceu no século III a.C., sendo portanto após a construção do Monumento.

Obras de Leonardo Da Vinci

Muitos tentam mostrar que nas obras Da Vinci usava as os retângulos áureos, como na Monalisa, mas na maioria das imagens, os triângulos vem soltos, em qualquer lugar na imagem, não mostrando um ponto de interesse para colocar o retângulo.

Outra obra é O Homem Vitruviano, é possível perceber que o umbigo não encaixa no retângulo, outras divisões próximas a razão áurea poderiam ser usadas. Nas notas da obra não é possível encontrar referências ao uso da razão áurea o que nos leva a acreditar que o autor não a utilizou.

Outras obras

A Grande Pirâmide de Quéops no Egito não foi construída seguindo proporções áureas.

O Edifício do Secretariado das Nações Unidas em Nova Iorque nos Estados Unidos não possui proporções áureas.

Concluão

Com isso, podemos observar que a semelhança de triângulos pode ser muito utilizada para encontrar a razão áurea. Segundo o currículo do estado de São Paulo do ano de 2011, a semelhança de triângulos é conteúdo de geometria para o 3° bimestre do 9° ano do Ensino Fundamental II. Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes e saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos são alguns exemplos de habilidades desenvolvidas no estudo de semelhança de triângulos ainda segundo o mesmo currículo.

Acreditamos que é possível ensinar a Razão Áurea na educação básica de uma forma um pouco menos elaborada do que foi apresentada no trabalho, procurando maneiras de o aluno se interessar pelo assunto. Propor atividades para abordar o tema utilizando de metodologias ativas e softwares de geometria dinâmica para construir o número de ouro conceitualmente com os estudantes e fornecer uma aprendizagem significativa para estes são alguns exemplos para fomentar o interesse dos alunos e das alunas pelo tema. Além de mostrar lugares onde este número aparece tais como em figuras geométricas, haja visto o pentágono regular abordado anteriormente.

Bibliografia

Markowsky, G. **Misconceptions About The Golden Ratio.** Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/rza/rza-html/rza-misconceptions-br.html>. Acesso em: 03 dez. 2020.

Sequências de Fibonacci, Alberto de Azevedo, RPM45 <http://www.rpm.org.br/cdrpm/45/9.htm>. Acesso em 03 dez. 2020

Estudo da Sequência de Fibonacci via teoria de Álgebra Linear, Alex Modesto Amoras (2014) <https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/01/Tcc-Alex-Corrigido-2015.pdf>. Acesso em 03 dez. 2020

Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, Maurício Zahn (2011) , Ed. Ciência Moderna. Acesso em 03 dez. 2020

Alegria Matemática: Sequências de Fibonacci, Ulysses Sodré (2006) <http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/fibonacci/seqfib1.htm#fib07>.Acesso em 03 dez. 2020

As formas e os números da natureza, Giorgio Wilberstaedt (2004) <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97052/Giorgio.pdf?sequence=1>. Acesso em 03 dez. 2020

A natureza e Fibonacci <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/natureza.h tm>. Acesso em 03 dez. 2020

O Número de Ouro <http://www.cdme.im-uff.mat.br/rza/rza-html/rza-br.html>