Nomes: Daniel Arnoni – 11222523, Giovanna Ferraz – 11223611, Luccas Silva – 10786628 e Yasmin Bettencourt – 11222864

O Princípio de Cavalieri é um postulado criado pelo matemático italiano, discípulo de Galileu, Francesco Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647). Esse postulado é usado para o cálculo de áreas e volumes de regiões e sólidos, respectivamente.

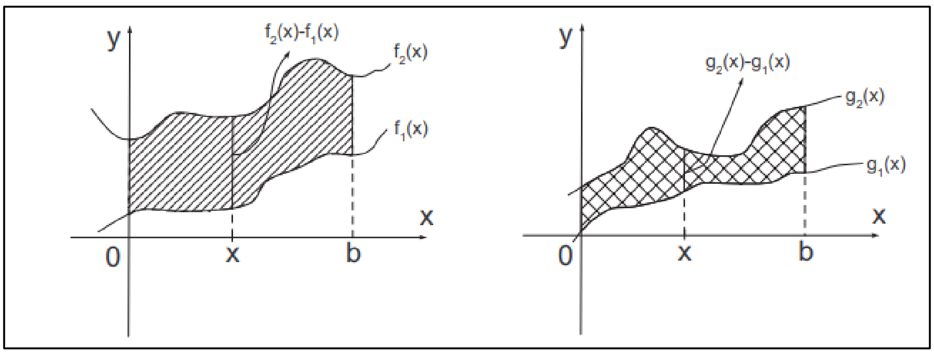
Sobre as definições, percebemos que são escritas de forma separada para área e volume. Vejamos as definições adaptadas:

- "Princípio de Cavalieri para áreas: Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa mesma constante." (PATERLINI, 2010, p.43-47).

Uma consequência para tal formulação é que se duas figuras planas possuírem a mesma altura e, para cada reta possuírem segmentos de mesmo tamanho, então as figuras possuem a mesma área.

Vejamos como realizar o cálculo de áreas utilizando o Princípio de Cavalieri:

Sejam R e S duas regiões em um sistema de coordenadas cartesianas. Suponha que R seja limitada por $0 \leq x \leq b$, com $b > x$ e limitada por $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, com f_1 e f_2 funções contínuas e $f_1(x) \leq f_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha, também, S a área limitada por $0 \leq x \leq b$, com b > x e pelos gráficos das funções contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ com $g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Fonte: <http://www.profmat.uem.br/dissertacoes-2/Greyce.pdf>.

Supondo que existe um k positivo tal que:

$$f_2(x) - f_1(x) = k \cdot [g_2(x) - g_1(x)] \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, a área da região R é k-vezes a área da região S.

- “Princípio de Cavalieri para volumes: Sejam P e Q sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as interseções de P e Q com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa constante.” (PATERLINI, 2010, p.43-47).

De modo análogo à explicação do princípio para áreas, temos como consequência: se dois sólidos possuírem a mesma altura e, para cada plano possuírem áreas iguais, então as figuras possuem o mesmo volume.

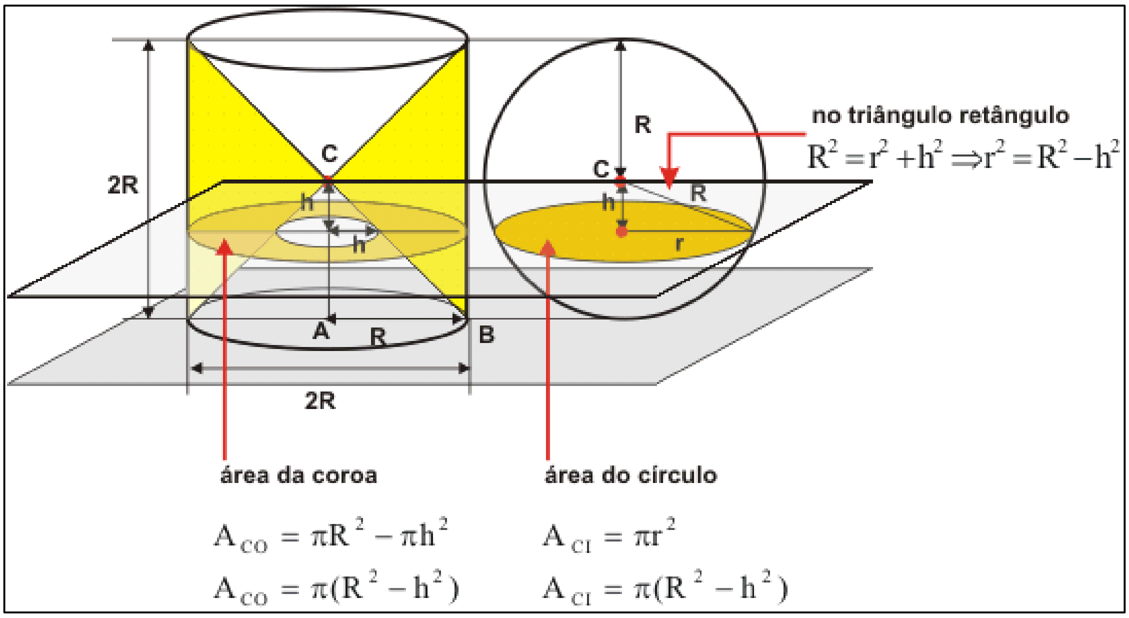
Queremos calcular, como exemplo, o volume de uma esfera utilizando o Princípio de Cavalieri.

Para calcular o volume da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri, partimos do conhecimento do volume de um cilindro de altura *2R* e base circular de raio *R* e de um cone de base circular de raio *R* e altura *R*, que são, respectivamente:

$$V_{ci} = \text{área da base} \cdot \text{altura do cilindro}$$

$$V_{co} = \frac{(\text{área da base} \cdot \text{altura do cone})}{3}$$

Mostraremos que o volume da esfera de raio R é igual ao volume da anticlepsidra (sólido correspondente ao cilindro menos o cone de base circular de altura e raio da base R, parte de cima e de baixo). Para isso, precisamos mostrar que a esfera tem mesma altura que a anticlepsidra e mesmas áreas de secção transversal para cada altura. Desse modo, pelo Princípio de Cavalieri, ambos os sólidos ilustrados abaixo teriam mesmo volume (anticlepsidra em amarelo na esquerda e esfera na direita).



Fonte: <https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/geometria/principio-de-cavalieri/calculo-de-volumes/>.

A altura de ambos os sólidos é *2R* (dado), então, basta mostrar que as áreas das secções transversais, nessas condições, são iguais.

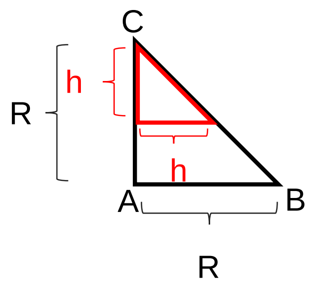
As secções transversais da esfera são círculos em que o raio varia de acordo com uma distância h do centro da esfera. Para calcular esse raio, usaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo de lados h (distância entre o centro da esfera e o centro da secção transversal usada), *r* (raio da secção transversal), e hipotenusa R (raio da esfera). O ângulo reto é formado entre *h* e *r*, e *R* é o lado oposto a esse ângulo, que liga o centro da esfera com um ponto da borda da esfera na altura h.

Temos, então:

$$R^2 = r^2 + h^2 \leftrightarrow r^2 = R^2 - h^2$$

A equação acima relaciona o raio das secções transversais com a distância delas do centro da esfera.

Analisando as áreas das secções transversais da anticlepsidra, percebemos que elas são coroas circulares de raio maior *R* e raio menor *h* (mesmo *h* que representa a distância da secção ao centro do cilindro). Isso pode ser mostrado por semelhança de triângulos:



Seja o triângulo retângulo de base *R* (raio da base), altura também *R* (altura do cone) e a hipotenusa é o segmento que liga o centro do cilindro a um ponto pertencente a circunferência exterior da base (triângulo ABC na imagem). Note que o triângulo ABC é isósceles, pois $altura_{cone} = raio\ da\ base_{cone}$.

Tomando uma altura h do centro do cilindro e traçando o segmento perpendicular a ela até a borda do triângulo ABC, formamos outro triângulo. O triângulo ABC é isósceles pois possui dois lados de comprimento R (vimos no parágrafo anterior), além disso é reto em A e os outros dois ângulos medem 45°. Portanto, o triângulo vermelho será isósceles, com um ângulo reto e o ângulo $\angle ACB$ mede 45°. Logo, os dois triângulos são semelhantes (caso ângulo-ângulo garante a semelhança), e então sua base é igual a sua altura h.

Desse modo, a área das secções transversais da anticlepsidra é a área de uma circunferência de raio *R* menos a de um circunferência de raio *h*, para cada altura *h*.

Sabemos que a área da circunferência é dada por $\pi \cdot (raio)^2$, logo a área das secções transversais da esfera de $(raio)^2 = R^2 - h^2$ em relação a altura *h* é:

$$A_{SE} = \pi \cdot (R^2 - h^2)$$

E a área das secções da anticlepsidra em relação a distância do centro h é:

$$A_{SA} = A_{C,r=R} - A_{C,r=h} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot h^2 = \pi(R^2 - h^2)$$

Assim, as áreas das secções dos dois sólidos em relação as alturas h são iguais, então pelo princípio de Cavalieri os volumes são iguais.

Como o volume da anticlepsidra é o volume do cilindro ($V_{ci} = área\ da\ base \cdot altura\ do\ cilindro$) menos o volume dos dois cones ($2 \cdot V_{co} = 2 \cdot \frac{(área\ da\ base \cdot altura\ do\ cone)}{3}$), temos:

$$V_A = (\pi \cdot R^2) \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{(\pi \cdot R^2) \cdot R}{3} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{6\pi R^2 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$$

Como já vimos, o volume da esfera de raio R é igual ao da anticlepsidra. Portanto,

$$V_E = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \quad \blacksquare$$

O Princípio de Cavalieri pode ser aplicado na escola básica de diversas maneiras, a primeira que temos a intenção de abordar com alunos no início do processo de aprendizagem de conceitos geométricos diz respeito a área, onde serão medidos com vários finos palitinhos áreas de diferentes figuras não convencionais mostrando que ao usar exatamente os mesmos palitos para preencher essas figuras elas terão mesma área.

Mais métodos podem ser utilizados nos anos mais avançados da escola básica, dando uma demonstração informal do princípio de Cavalieri e, mostrando sua aplicação para o cálculo de volumes, a ideia é utilizar sólidos formados de pilhas de papéis mostrando que mesmo mudando a forma do sólido se eles continuam tendo mesma altura e área das secções transversais os sólidos têm mesmo volume.

No Ensino Médio, por exemplo, é possível fazer a dedução do volume de uma esfera, pois os pré-requisitos são:

- volume de um cilindro e volume de um cone;
- área de circunferência;
- teorema de Pitágoras;

- triângulos e seus elementos;
- semelhança de triângulos.

Esse princípio é uma ferramenta importante para o estudo de áreas e volumes, possibilitando seus cálculos para as figuras que não têm formas convencionais. Os conceitos abordados pelo princípio, quando introduzidos no ensino básico, por meio de atividades visuais mais simples podem ajudar na formação matemática do aluno e na compreensão futura do Cálculo Diferencial e Integral.

Referências Bibliográficas

Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>.

LIMA, E. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>.

PATERLINI, R. **Os “Teoremas” de Cavalieri**. RPM, Rio de Janeiro, 72.

PILATI, G. **O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera.** Tese (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015.

PRIMO, M. **O Princípio de Cavalieri para Cálculo de Volumes no Ensino Médio: Algumas Possibilidades**. Tese (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2013.