Números algébricos e transcendentes

MAT0315 - Introdução à Análise

Bruno Cecilio	nºUSP: 8936033
Gabriel Hadad Lasco	nºUSP: 11223055
Maria Luiza Rocha Bueno	nºUSP: 11222457
Matheus Siquelli Nalli	nºUSP: 11298528

1 Introdução e reflexões sobre o ensino

A partir do estudo de equações com coeficientes inteiros, foram criadas as definições de número algébrico e transcedente, que serão apresentadas na próxima seção. Tem-se um desenvolvimento histórico desses conceitos e perguntas que surgiram a partir desses estudos."Existem números transcedentes?"é uma dessas perguntas. E, para responder ela, demorou tempo e estudo de diversos matemáticos.

Assim, no ensino básico, é possível utilizar o estudo de números algébricos e transcedentes para complementar o estudo do conjunto dos números irracionais, usufruindo dessas perguntas históricas. A importância disso é que, compreender a perspectiva histórica da matemática e seguir caminhos lógicos que foram seguidos anteriormente, nos elucida uma faceta da matemática que se mantém obscura na perspectiva tradicional: a de uma matemática humana e ativa socialmente, no sentido de que também pode agir como agente despertador de reflexões críticas nos alunos. Como Antonio Miguel afirma, o conhecimento histórico dos processos matemáticos desperta o interesse do aluno pelo conteúdo que está sendo ensinado. Segundo o autor, se atribui um "poder mágico" à história, esse o qual transforma a atitude do aluno em relação à matemática.

A Matemática é uma área basilar para o desenvolvimento intelectual humano, ela ajuda desenvolver a capacidade de abstração, a habilidade de realizar operações lógicas, aritméticas, geométricas-espaciais, dentre o uso de outras faculdades da mente. Este desenvolvimento compõe a atividade prática cotidiana também, no trabalho e nos estudos (desta e de outras áreas), compõe uma conexão indissociável entre teoria e prática, entre compreensão e transformação do mundo.

Um dos desafios da pedagogia matemática é estabelecer esse elo entre o saber e a prática. Por mais que, por vezes, o saber não tenha imediaticidade prática, é importante desvelar qualquer caráter místico no aprendizado da matemática, trazer concretude para potencializar o processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido é levantado por Antonio Miguel (1995) o papel da história no ensino da matemática.

Enquanto a História não é por si autossuficiente à aprendizagem de matemática, como mediadora necessária entre o concreto e abstrato, ela pode servir como elemento de contextualização e interdisciplinaridade, motivando a aprendizagem. Um dos problemas que a História da Matemática carrega é a insuficiente produção e pesquisa nesta área para além de apresentar as conclusões do desenvolvimento histórico do conhecimento matemático.

Um exemplo é o objeto deste trabalho, os números transcendentes e seu ensino, o qual sabemos que foi primeiro problematizado em meados do século XVIII, talvez por Leonhard Euler (1707-1783), apontando a existência de números não-algébricos. O primeiro exemplo demonstrando a existência de tais números foi de Joseph Liouville (1809-1882), um século depois, em 1844. Em 1874 Georg Cantor (1845-1918) demonstrou a enumerabilidade do conjunto dos números algébricos, e isto tem como consequência a não enumerabilidade do conjunto dos números transcendentes (que serão demonstradas mais à frente), e, portanto, que o conjunto dos números transcendentes tem cardinalidade maior que o conjunto dos números algébricos. E, mesmo que o conjunto dos números transcendentes é "tão grande", levou-se muito tempo para se provar a existência desses números, e isso mostra como que, na matemática, perguntas "simples"podem se mostrar extremamente difíceis. Exemplos de números transcedentes tradicionais, são e e π. Foi em 1873 que Charles Hermite (1822-1901) demonstrou que e é transcendente, e quase uma década depois Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demonstrou que π é transcendente. Vale notar que, apesar disso, ainda hoje não sabemos se $\pi + e$ e $e\pi$ são transcendentes, nem que são irracionais.

Com poucas informações da motivação desta investigação e do próprio processo de investigação em si, o que essa breve pontuação histórica pode indicar é que o movimento para definir os números transcendentes partiu primeiro de caracterizar os números algébricos, para a partir de sua negação definir os números transcendentes. Apesar do conjunto dos transcendentes ter cardinalidade maior que o conjunto dos algébricos, defini-los é uma tarefa muito mais difícil. Por isso, uma sugestão de sequência histórica-didática é trabalhar a partir do desenvolvimento dos conjuntos de números mais simples aos mais avançados, buscando a contextualização histórica de seu desenvolvimento: Naturais ($\mathbb{N}$) para contar (necessidade de contar o gado na Antiga Mesopotâmia), Racionais ($\mathbb{Q}$) para medir (necessidade de divisão de terras no Egito Antigo), Irracionais $\mathbb{I}$ como consequência da insuficiência dos racionais para medir (questão da hipotenusa do triângulo observada por Pitágoras, além da descoberta do π e do e), Inteiros ($\mathbb{Z}$) para calcular prejuízos (com a expansão comercial no Renascimento, apesar da noção de negativo datar antes deste período entre os chineses, gregos e outras civilizações).

Assim, apesar de que, ensinar propriamente sobre números algébricos e transcendentes no ensino básico pode ser algo bem desafiador, é possível contemplar esse tópico no ensino de conjuntos númericos. Dessa forma, pode-se apresentar o conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números transcendentes, e então os utilizar para estimular perguntas, reflexões críticas, instigar curiosidade, convocando assim a imaginação, a intuição e a capacidade de conjecturar. Dessa maneira, pode-se complementar o estudo do conjunto dos números irracionais apoiando-se nos números transcendentes, mostrando aos alunos que existem outros tipos de irracionais que não são raizes de alguma coisa, como o π e o e.

Partindo da compreensão destes conjuntos numéricos, buscando ligações com a realidade dos alunos de situações práticas que envolvam tais números (isto é, lhes dando concretude), e, apoiando na ideia de instigar a curiosidade dos estudantes, é possível ensinar melhor conjuntos numéricos.

2 Desenvolvimento teórico

Definição 2.1 (Números algébricos e transcedentes)**.** Dizemos que um número real x é algébrico se ele satisfaz uma equação do tipo $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$ com $a_0, a_1, ..., a_n$ inteiros. Caso contrário, ele é dito transcedente.

Segundo Euler, os números transcendentes têm tal nome por transcenderem o poder das operações algébricas.

A partir da definição acima, podemos entender os números algébricos como raizes de polinomios de coeficientes inteiros. Ademais, podemos chegar a outra definição equivalente apenas alterando "coeficientes inteiros"para "coeficientes racionais", bastando para isso realizar a divisão de todos os termos do polinômio pelo seu coeficiente dominante.

Podemos obervar que números racionais são algébricos, pois, tomando um número racional p/q, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ ele satisfaz a equação $qx - p = 0$. Dessa maneira, é fácil concluir que se o número não é algbérico, então com certeza ele é irracional. Porém, podemos nos perguntar se existem irracionais algébricos. Existem, como por exemplo o $\sqrt{2}$, que satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

Então, temos uma pergunta importante: existem números não algébricos? Como já sabemos que se o número é não algébrico ele é irracional, podemos perguntar: existem irracionais não algébricos?

No século XIX os matemáticos da época suspeitavam que existiam, mas nenhum conseguiu mostrar um exemplo. Em 1844 o matemático Joseph Liouville demonstrou que números não algébricos realmente existiam.

Definição 2.2. Um número real r é dito número de Liouville se existir uma sequência infinita de racionais $(\frac{p_j}{q_j})_{j \geq 1}$ tal que $q_j > 1$ e

$$0 < |r - \frac{p_j}{q_j}| < \frac{1}{q_j{}^j}$$

para todo $j \geq 1$

Proposição 2.1. Todo número de Liouville é irracional.

Proposição 2.2. Todo número de Liouville é transcendente.

Exemplo 2.1. Um dos exemplos de número de Liouville seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.1100010000...$$

Apesar de não apresentarmos a demonstração da transcendência dos números de Liouville, sabemos que esta é mais simples que a demonstração da transcendencia do e, por exemplo, e isso se dá porque os números de Liouville são "artificiais", isto é, eles foram criados para serem transcendentes.

Uma curiosidade é que em 1962, Paul Erdos demonstrou que todo número real pode ser representado como a soma de dois números de Liouville.

2.1 Demonstração de que números transcedentes existem

Definição 2.3. Dado um conjunto A, se existe uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em A, então o conjunto A é enumerável. Caso seja impossível estabelecer essa bijeção, então A é não enumerável.

2.1.1 O conjunto dos número reais é não enumerável

Demonstração. Com essa definição, é possível provar que o conjunto dos números reais é não enumerável. Para isso, vamos supor que ele seja enumerável. Então, pela definição de conjunto enumerável, concluímos que existe uma bijeção entre os elementos de $\mathbb{N}$, indicados por x_i e os elementos de $\mathbb{R}$, indicados por y_i. Vamos ilustrar essa associação:

$$\begin{gathered} x_0 \to y_0 \\ x_1 \to y_1 \\ x_2 \to y_2 \\ x_3 \to y_3 \\ . \\ . \\ . \end{gathered}$$

Note ainda que cada número real y_i pode ser representado como $y_i = a_0, a_1a_2a_3...$, em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ representa a parte inteira do número real, e $a_j \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}$ representam suas casas decimais. Suponha agora a existência de um real $y = a_0, a_1a_2a_3...$, tal que:

- a_0 é diferente da parte inteira de x0
- a_1 é diferente do primeiro algarismo depois da vírgula de x_1
- a_2 é diferente do segundo algarismo depois da vírgula de x_2
- a_3 é diferente do terceiro algarismo depois da vírgula de x_3
- a_n é diferente do n-ésimo algarismo depois da vírgula de x_n

Assim, conseguimos encontrar um número real y que é diferente de todos os números reais que haviam sido listados na bijeção. Mas isso é um absurdo, pois os números reais listados eram, por hipótese, todos os reais. Assim, concluímos que a hipótese inicial de que os reais eram enumeráveis é falsa. Portanto, os números reais são não enumeráveis.

■

2.1.2 O conjunto dos números algébricos é enumerável

Para realizar essa prova, vamos recorrer à

Definição 2.4. a altura A de um dado um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ de coeficientes inteiros é dada pela expressão:

$$A = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0| + n - 1$$

Demonstração. Note que

- O conjunto de alturas possíveis para um polinômio é enumerável (corresponde ao próprio conjunto $\mathbb{N}$).
- Há um número finito de polinômios com uma altura A fixada:
  - Para $A = 1$, temos $P(x) = x$ ou $P(x) = -x$ (dois polinômios);
  - Para $A = 2$, temos $P(x) = 2x$ ou $P(x) = -2x$ ou $P(x) = x + 1$ ou $P(x) = x - 1$ ou $P(x) = -x + 1$ ou $P(x) = -x - 1$ ou $P(x) = x^2$ ou $P(x) = -x^2$ (oito polinômios);

  E assim sucessivamente.

  Por fim, cada polinômio possui exatamente n raízes complexas (um número finito, portanto)

  Assim, é possível listar todos os números complexos que são raízes de um polinômio qualquer de coeficientes inteiros, o que é feito esquematicamente abaixo:

$$A = 1 \rightarrow 2 \text{ polinômios} \rightarrow \text{Número finito de raízes complexas}$$
$$A = 2 \rightarrow 8 \text{ polinômios} \rightarrow \text{Número finito de raízes complexas}$$

  De forma genérica:

$$A = a \rightarrow k \text{ polinômios} \rightarrow \text{Número finito de raízes complexas}$$

  Disso, concluímos que o conjunto dos números algébricos é a reunião de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. Logo, o conjunto dos números algébricos é enumerável.

■

2.1.3 Existência de números transcendentes

Proposição 2.3. Dados os conjuntos X, Y e Z, se X for não enumerável, Y for enumerável, e $X = Y \cup Z$, então Z é não enumerável.

Proposição 2.4. Os números transcedentes existem.

Demonstração. Analisemos então a situação que temos: de 2.1.1, sabemos que $\mathbb{R}$ é não enumerável, e de 2.1.2, que os números algébricos são enumeráveis. Como todo subconjunto de um conjunto enumerável também é enumerável, concluímos que o conjunto A dos números reais algébricos também é enumerável. Então, sendo T o conjunto dos transcendentes, temos:

$$\mathbb{R} = A \cup T$$

Temos $\mathbb{R}$ não enumerável e A enumerável; logo, o conjunto dos transcendentes não apenas existe (é não vazio), como também é não enumerável. ■

2.2 Alguns exemplos

2.2.1 Exemplos de números transcendentes

Mencionamos neste trabalho que π e e são transcendentes. Também vimos o exemplo de um número de Liouville. Agora, vamos exibir alguns outros exemplos de números transcendentes.

Exemplo 2.2. Gelfond-Schneider em 1935, demonstrou que, se a é um número algébrico diferente de 0 e 1, e b é um algébrico irracional, então a^b é transcendente. Daí, temos como exemplos:

- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$
- i^i
- $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$

Exemplo 2.3. Outro exemplo que temos de número transcendente é:

- e^{π}

Apesar de sabermos a transcedência de e^{π}, como falamos anteriormente, ainda não foi demonstrado a transcendência de $e+\pi$ e $e\pi$, mas se conjectura que estes são sim transcendentes. Schanuel, em 1956 anunciou uma conjectura que, hoje em dia é considerada o maior problema em aberto em Teoria dos Números Transcendentes. E, se assumirmos como verdade essa conjectura, teremos de imediato a transcedência de não só $e+\pi$ e $e\pi$, mas como e^e, π^{π}, π^e.

2.2.2 Exemplos de números algébricos

Já mostramos que todo número racional é algébrico. Além disso, comentamos sobre alguns irracionais algébricos, como $\sqrt{2}$. Agora, vamos apresentar alguns outros exemplos de números algébricos.

Exemplo 2.4. O número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é algébrico.

De fato, dado $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, podemos chegar a zero fazendo:

$$\begin{gathered}
\sqrt{1+\sqrt{2}} \times \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} \\
1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2} \\
\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \\
2-2 = 0 \\
0
\end{gathered}$$

Ou seja, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é raiz da equação $(x^2-1)^2-2$, ou $x^4-2x^2-1=0$

Exemplo 2.5. O número $\sqrt{5}+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ é algébrico.

De fato,Dado $\sqrt{5}+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, podemos chegar a zero fazendo:

$$\begin{gathered}
(\sqrt{5}+\sqrt{3}\times\tfrac{1}{\sqrt[3]{5}}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{3}\times\tfrac{1}{\sqrt[3]{5}}) = 5+2\sqrt{5}\times\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{5^2}} \\
5+2\sqrt{5}\times\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{5^2}}-5 = \tfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{5^2}} \\
(\tfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{5^2}}) \times (\tfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{5^2}}) = \tfrac{60}{\sqrt[3]{5^2}}+\tfrac{6\sqrt{15}}{5}+\tfrac{9}{5} \\
\tfrac{60}{\sqrt[3]{5^2}}+\tfrac{6\sqrt{15}}{5}+\tfrac{9}{5}-\tfrac{9}{5} = \tfrac{60}{\sqrt[3]{5^2}}+\tfrac{6\sqrt{15}}{5} \\
(\tfrac{60}{\sqrt[3]{5^2}}+\tfrac{6\sqrt{15}}{5}) \times (\tfrac{60}{\sqrt[3]{5^2}}+\tfrac{6\sqrt{15}}{5}) = \tfrac{104\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5^2}}+756 \\
\tfrac{104\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5^2}}+756-756 = \tfrac{104\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5^2}} \\
(\tfrac{104\sqrt{15}}{s\sqrt[3]{5^2}}) \times (\tfrac{104\sqrt{15}}{s\sqrt[3]{5^2}}) = 32448 \\
32448-32448 = 0 \\
0
\end{gathered}$$

Ou seja, $\sqrt{5}+3\times\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ é raiz da equação $(((x^2-5)^2-\frac{9}{5})^2-756)^2-32448=0$

3 Referências

1. MIGUEL, Antonio. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.** p. 73-106 (Primeira Parte: 73-89). Zetetiké, v. 5, n. 2, 1997.

2. PATERLINI, RR. **Artitmética dos números reais**. Departamento de Matemática UFSCar, 2008.

3. OLIVEIRA, Julimar. **Números irracionais e transcendentes.** 2009. 61 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Departamento de Matemática e Física, Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Maranhão, Imperatriz, 2009.

4. HERSTEIN, **Topics in Algebra**, 1964.

5. LAFETÁ, A. C.; SILVA, E.; LELIS, J. **Teoria dos números transcendentes: do teorema de Liouville à conjectura de Schanuel**, 2017.

6. RAMALHO, A. F. A.; DIAS, M. L. **Uma conversa sobre números transcendentes**, 2012.