NÚMERO DE OURO: VERDADES E EQUÍVOCOS
O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Marco Antonio David Lira - 11223080
Leonardo Tada Shitinoe Cunha - 11222930
Nicholas Baraldi Boscolo - 11222627
Daisy Christina Sabo Chaves - 7578706

Introdução

A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro são conceitos que grande parte das pessoas já ouviram falar ao menos uma vez, em algum momento de sua escolaridade. Perceber e entender, de maneira ampla, a forma como esses se associam, não é uma tarefa simples. No texto a seguir, será feita uma análise mais estruturada sobre esses conceitos, que são muito mais amplos e complexos do que parecem, trazendo à tona suas origens, suas verdadeiras definições e os porquês dessa associação existir, em conjunto com exemplos de suas aplicações na natureza e design. A partir disso, serão discutidos alguns pontos positivos do ensino desses conceitos a alunos de diferentes idades, bem como estratégias didáticas que visem um aprendizado mais significativo.

Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, ou Leonardo Fibonacci, como era conhecido, foi o responsável por diversos feitos matemáticos, como parte da introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa e a sequência que leva seu nome. Em 1202, em seu livro intitulado *Liber Abaci,* ou Livro do Ábaco, Fibonacci descreve os nove algarismos indianos e as operações elementares envolvidas em forma de problemas. Um desses problemas envolvia a reprodução de coelhos e um questionamento acerca de uma situação em que, dado um par de coelhos filhotes, busca encontrar quantos pares podem ser gerados dentro de um ano, tendo em vista que: a) um par de coelhos adultos dá à luz a um novo par mensalmente; b) um par de coelhos é fértil a partir do segundo mês. Ao esquematizar os dados, mês a mês, desprezando fatores como mortalidade e problemas genéticos no cruzamento e considerando apenas o total de pares de coelhos, chega-se na famosa Sequência de Fibonacci: $Fn = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$

Essa sequência pode ser facilmente generalizada segundo o princípio da recorrência. Note que cada termo, a partir do 3º, é a soma de seus dois antecessores. Antes disso, os termos valem 1. Assim, tem-se a primeira propriedade da Sequência de Fibonacci.

$$Fn = Fn-1 + Fn-2,\ n \geq 3$$

Essa propriedade é crucial para justificar a associação do Número de Ouro com a Sequência de Fibonacci. A forma correta para expressar a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci seria afirmando que o limite da sequência dos quocientes formados pelos termos consecutivos da sequência de Fibonacci é o Número de Ouro. A seguir, mostraremos a prova matemática de que essa é uma afirmação verdadeira.

Queremos mostrar que se Fn é a sequência de Fibonacci, então $\frac{f_{n+1}}{f_n} \to \varphi$. Por recursão, sabemos que:

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \Rightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{f_n/f_{n-1}}$. Note que $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ é da mesma forma que $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, então vamos escrever $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ de maneira análoga. $\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{f_{n-1}/f_{n-2}}$.

Então, substituindo de volta na razão inicial, temos $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_{n-1}/f_{n-2}}}$, e assim, podemos repetir esse processo, reescrevendo essa razão como uma fração continuada. Chegaremos em:

$$\lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}} .$$

Agora, tome $\lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = x$ e, com isso, $x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtêm-se como solução $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Despreza-se a raiz de valor negativo, haja vista que Fn é estritamente crescente e positiva, então a razão também deverá ser positiva. Assim, sua raiz positiva é $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de ouro.

Fica provado, então, que o limite da sequência dos quocientes formados pelos termos consecutivos da sequência de Fibonacci é o Número de Ouro. Mas o que é, de fato, esse número?

Número de Ouro e os Retângulos Áureos

Os retângulos áureos possuem propriedades diversas. Por definição, um retângulo áureo é um retângulo ABCD qualquer em que, ao retirar dele um quadrado ABFE, o retângulo restante, CDEF, será semelhante ao retângulo ABCD. Sendo **a+b** e **a** os lados do retângulo ABCD, fazendo mão da semelhança de figuras geométricas, cumpre-se a relação obtida pelo segmento áureo, tal que $\frac{a}{(a+b)} = \frac{b}{a}$.Essa razão foi denominada Φ e seu valor é igual a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Veja a seguir um retângulo áureo:

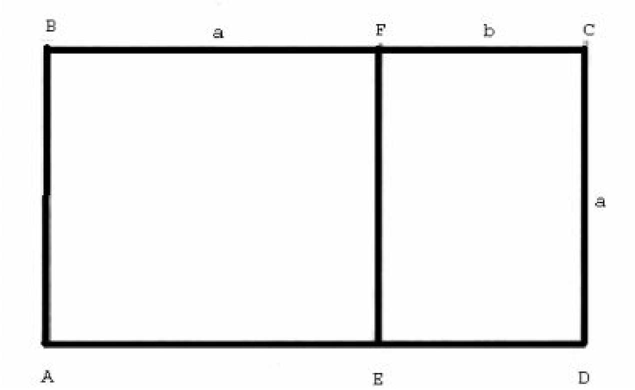

Figura 1 - Exemplo de retângulo áureo de lados **a+b** e **a**.
(Fonte: MARTINS, PATRÍCIA. **O Número de Ouro e a Divina Proporção)**

Esse processo de criar um quadrado e outro retângulo áureo pode repetir-se infinitas vezes, mantendo-se a mesma proporção. A partir dessa repetição, percebe-se um padrão espiral na figura, já que novos retângulos áureos menores serão criados dentro dos já existentes. Ao traçar quartos de circunferência nos quadrados gerados por esse processo, cria-se a Espiral de Ouro.

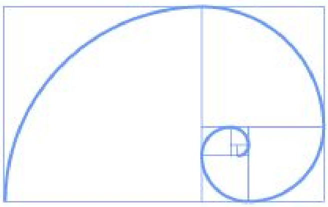

Figura 2 - Espiral de Ouro.
(Fonte: <https://www.ciabyte.com.br/faq/como-desenhar-a-espiral-de-ouro.asp>. Acesso em 27/11/2020.)

Esses conceitos foram discutidos, porém, muito antes da descoberta da Sequência de Fibonacci, por Euclides. Em seu livro *Os Elementos,* datado de 300 a.C, o grande geômetra define o conceito da divisão em média e extrema razão da seguinte forma: "*um segmento de reta é dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo*". Ao seguir a definição de Euclides para um segmento AB, obtém-se o segmento áureo de AB.

Fórmula de Binet

Conforme foi explicitado, a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, mesmo não sendo interdependentes, possuem certa associação entre si. A seguir, será mostrado uma outra propriedade.

A sequência de Fibonacci é conhecida, predominantemente, pela sua fórmula recursiva. Essa fórmula, porém, não é eficiente quando se pensa em generalizações, como é comum em algumas formas de progressões, como as aritméticas e geométricas. Nessas, existem as chamadas fórmulas do Termo Geral, em que, fazendo uso da razão entre os termos das sequências e a posição desejada, é possível encontrar qual o termo que ocupa tal ordem.

Como visto e demonstrado acima, a razão entre os termos da Sequência de Fibonacci não é constante, mas no limite tende ao número de ouro. Esse questionamento levou ao desenvolvimento da Fórmula de Binet, uma maneira de generalizar os termos da Sequência de Fibonacci, fazendo uso da posição desejada e $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\}$$

Conceitos Equivocados

Falar sobre o número de ouro sem citar artes, arquitetura, literatura e estética é uma tarefa difícil. Para os gregos, essa razão representava a lei da beleza matemática, o que induz uma linha de pensamento equivocada a respeito de suas diversas manifestações ao longo da história. Em diversos livros, revistas e até, materiais didáticos, encontra-se que a existência do número de ouro já havia sido provada em outras ocasiões, como nas Pirâmides do Egito Antigo, no Parthenon, na Catedral de Notre Dame, com os pitagóricos, na construção da estrela pentagonal, nos desenhos de Leonardo Da Vinci e até no corpo humano, como descrito no Homem Vitruviano.

Porém, sabe-se hoje que essas associações não são verdadeiras. Markowsky (1992) discorre sobre os conceitos errados dessas associações. O autor mostra que não há veracidade que as Pirâmides do Egito foram construídas para que a área do quadrado cujo lado é a altura da pirâmide seja igual a área da face triangular, mostrando que os egípcios apenas mantiveram uma uniformidade entre as medidas dos lados e altura, mas desconheciam essa razão e seu pertencimento na obra. O autor também fala sobre o Parthenon, mostrando que o fato desse encaixar-se perfeitamente em um retângulo áureo cabe ao fato de que, no período Helenístico, havia um costume de se trabalhar com proporções diretas entre construções, e o Parthenon apenas seguiu essa proporção de 4:9 entre seus lados.

Vindo para contextos mais contemporâneos, supostamente, empresas de design de eletrônicos fazem uso da razão áurea para confeccionarem seus produtos e deixá-los "esteticamente mais agradáveis", já que existe a crença de que os retângulos áureos são "mais estéticos" do que os demais. Markowsky (op. cit) também mostra que esse é um conceito errado, já que surgiu, em grande parte, por um único experimento, realizado em torno de 1860 por Gustav Fechner. Esse experimento consistia em apresentar ao entrevistado 10 retângulos e pedindo para que ele escolhesse o "mais estético", sendo que suas proporções entre base e altura variavam. Nesse estudo, 76% das respostas estavam entre os retângulos com proporções próximas à razão áurea, enquanto os demais receberam menos de 10% dos votos, cada um. Como descrito por Markowsky, limitar a escolha em apenas 10 opções pode gerar um resultado não muito preciso. Além disso, a forma como esses são apresentados pode influenciar a decisão.

O autor promove um experimento informal, distribuindo 48 retângulos de formas diferentes, todos com a mesma altura, variando apenas sua base. Da primeira forma, distribuídos de forma aleatória, enquanto na segunda, em forma decrescente. Ao realizar outro experimento com essas duas distribuições, as respostas de retângulos "mais estéticos", as pessoas não eram capazes de encontrar os retângulos áureos. Assim, não é verdadeira a afirmação que os retângulos áureos são mais estéticos, sendo possível apenas mostrar que há uma faixa de proporções preferidas.

Aprender sobre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci é uma ótima maneira de trabalhar conceitos interdisciplinares, pois fica evidente a sua forte associação com crenças históricas e diversos conceitos matemáticos. Esse tópico é de grande relevância se introduzido à alunos ainda no Ensino Fundamental II, pois é quando, de acordo com a BNCC, os alunos começam a ter contato com os diferentes conjuntos numéricos. Além disso, por envolver conceitos de sequências, limites e equações, é um bom tema para desenvolver algumas noções fundamentais da matemática, como o conceito de infinito, resolução de problemas e equações.

Ao ensinar questões sobre o número de ouro, uma forma de gerar interesse por parte dos alunos é através das curiosidades e de suas diversas propriedades. Esse é um dos números irracionais mais curiosos já encontrados, cuja representação decimal é infinita e não periódica, de valor aproximado a 1,6180339.

Considerações Finais

O número de Ouro e a Sequência de Fibonacci são, muitas vezes, apresentados com ênfase em suas associações. Porém, o presente trabalho traz à tona uma discussão mais ampla sobre seus conceitos, origens e desdobramentos. Além disso, discute-se sobre os conceitos errôneos que são, comumente, associados ao seu respeito, como as questões estéticas e arquitetônicas, trazendo evidências para tal desconstrução.

Essa análise mostra-se relevante em três esferas: a) histórica, b) educacional e c) matemática. Pelo ponto histórico, a quebra de paradigmas acerca de sua interdependência é crucial, com evidências de que o Número de Ouro é mais antigo que a Sequência de Fibonacci. Consequentemente, sua ocorrência em construções, obras e desenhos, não mostra-se intencional.

Às vistas educacionais, sua relevância surge, predominantemente, quanto ao método e a forma como esse conteúdo é ministrado. Diversos livros e revistas didáticas trazem conceitos equivocados sobre o tema, visando uma simplificação do conteúdo e, assim, facilitando a abordagem. Porém, essa estratégia não é válida, somente se, com a simplificação, os conceitos permaneçam corretos. Assim, seu ensino pode influenciar de forma significativa o futuro aprendizado sobre temas matemáticos, como conjuntos numéricos, sequências, progressões e até o conceito de infinito, vinculado ao limite.

Em termos matemáticos, o rigor nas demonstrações, a forma de representação numérica, o conceito de limite, e até a parte geométrica, encontrada nos retângulos áureos e, consequentemente, nas espirais, traz uma carga conceitual avançada, de forma simplificada, para o leitor. Dessa forma, associando os três campos, o leitor é capaz de, não só compreender de forma mais ampla os conceitos trabalhados, mas, também, outros conteúdos da educação matemática, de forma simples e desmistificada.

Referências

MARKOWSKY, GEORGE. Misconceptions About The Golden Ratio. **College Mathematics Journal**, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992

RAMOS, MARCOS GERTRUDES OLIVEIRA. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. Bahia, 2013

PEREIRA, LIVIA. FERREIRA, MARCOS. **Sequência de Fibonacci: História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea.** Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

MARTINS, PATRÍCIA. **O Número de Ouro e a Divina Proporção.** XXII SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, 2009.

<https://www.ciabyte.com.br/faq/como-desenhar-a-espiral-de-ouro.asp> Acesso em 27/11/2020.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Divis%C3%A3o_em_m%C3%A9dia_e_extrema_raz%C3%A3o> Acesso em 27/11/2020.

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm.> Acesso em 27/10/2020.