TRABALHO SOBRE PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR - G4

DAVI NASCIMENTO DE CARVALHO

DRIELY BUENO ROTH

LARISSA YUMI SHIROMA

VICTÓRIA FIGUEIREDO KOBAYASHI

Tema do trabalho: Logaritmo e Aplicações.

Introdução: O trabalho apresentará uma breve introdução sobre a definição de função logarítmica e algumas de suas propriedades. Além disso, conterá exemplos de possíveis aplicações da função no nosso dia a dia, com o objetivo de despertar curiosidade dos leitores e fazer com que haja interesse em aprender mais sobre os logaritmos. Por fim, será descrito como introduzir o assunto de maneira interessante na sala de aula, fazendo relações históricas, e relacionando com conhecimentos que os alunos já possuem, como progressões aritméticas e geométricas.

São Paulo

2020

SUMÁRIO

1. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Partindo de uma já conhecida função do tipo f(x) = $\log_a x$, $a \, \varepsilon \, R$, temos que a positivo e diferente de 1 é a base do logaritmo, f(x) é o logaritmo e x > 0 é o logaritmando. Para muito além de ser a função inversa da função exponencial, a função logarítmica tem propriedades muito interessantes para a Matemática.

Uma das mais importantes é a Propriedade Fundamental dos Logaritmos, a qual diz que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall x, y \, \varepsilon \, R_+$. Essa propriedade é de extrema relevância no estudo matemático, pois a função logarítmica é a única que consegue transformar produto em soma. Foi um avanço extremamente importante, pois permitiu um grande avanço no desenvolvimento do conhecimento. É sempre importante ter em conta, afinal, a dificuldade em se realizar contas grandes sem o auxílio das muito atuais calculadoras.

Michael Stifel (1487-1567) foi um matemático alemão, responsável pela formalização de uma importante relação entre progressões aritméticas e progressões geométricas, construindo melhor o estudo dos logaritmos e possibilitando a descrição da propriedade acima.

A demonstração dessa propriedade é simples. Basta tomar b = $\log_a x$ e c = $\log_a y$. Daí, assumindo que existe inversa dessa função, vem que x = a^b e y = a^c, pela definição dos logaritmos.

Usando propriedades da função exponencial e da função logarítmica (lembrando que as propriedades desta segunda "derivam" das da primeira), note que xy = $a^b . a^c = a^{b+c}$. Disso, podemos fazer $\log_a(xy) = \log_a(a^{b+c}) = b + c = \log_a x + \log_a y$.

Outra propriedade muito interessante é que a função f(x) = lnx pode ser descrita como uma série, de tal forma que $\ln x = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k+1} . \frac{(x-1)^k}{k}$.

Antes de começar, é importante lembrar, como já visto e demonstrado em aula, que a soma de uma progressão geométrica infinita de razão r, |r| < 1, é dada por S = $\frac{1}{1-r}$. A função f(x) = $\frac{1}{1-x}$ é representada pela série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\forall x \varepsilon \,]-1, 1[$.

Vamos começar buscando uma série de Taylor que represente ln(x+1).

Partindo do princípio de que a derivada de ln(x+1)= $\frac{1}{1+x}$. Para |x| < 1, vale que:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Vamos utilizar o teorema abaixo para continuar a demonstração, mas não o vamos demonstrar, porque não é relevante neste trabalho:

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, para $|x - a| < R$. Temos:

(a) A função f é contínua no intervalo aberto $]a - R, a + R[$.

(b) A função f é derivável em $]a-R, a+R[$ e sua derivada é dada por $f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots + nc_n(x - a)^{n-1} + \cdots$

(c) A função f é integrável e $\int f(x)dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\, dx$ para algum K. As séries em (b) e (c) têm raio de convergência igual a R.

Usando este teorema, concluímos que:

$$\ln(1+x) = K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Para descobrir o valor de K, basta fazer x = 0. Dessa forma, obtém-se $\ln(1) = K \Rightarrow K = 0$

Portanto,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \varepsilon\ ]-1, 1[$$

Agora, seja z = 1 + x. Daí,

$$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad \forall z \varepsilon\ ]0, 2[\text{, c.q.d.}$$

Podemos ver no gráfico abaixo como as somas parciais realmente vão se aproximando da função logarítmica.

Legenda: em azul, temos a função f(x) = lnx
Em rosa, temos $S_1 = x - 1$
Em lilás, temos $S_2 = S_1 - \frac{(x-1)^2}{2}$
Em verde, temos $S_3 = S_2 + \frac{(x-1)^3}{3}$
Em amarelo, temos $S_4 = S_3 - \frac{(x-1)^4}{4}$
De forma geral, teríamos $S_n = S_{n-1} + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}$

2. POSSIBILIDADES DE APLICAÇÕES

Há inúmeras possibilidades de aplicações das funções logarítmicas. Mesmo que não seja perceptível para quem não está buscando, esse tipo de função é encontrada em diversos lugares.

Na Acústica, área da Física, por exemplo, encontra-se um exemplo fascinante. O ouvido humano não responde às intensidades sonoras linearmente, mas ao logaritmo de tal intensidade! É isso que permite ao ser humano escutar uma folha de árvore caindo no chão ou não ficar surdo com a explosão de uma bomba, já que o ouvido suporta uma intensidade sonora muito grande.

Além disso, na Química, o valor do pH (potencial hidrogeniônico de uma solução) também é calculado por meio de uma escala logarítmica. Só para constar, o pH de uma solução é dado por: $pH = -\log_{10}[H^+]$, sendo $[H^+]$ a concentração de íons H^+ existente.

Dentro da própria Matemática, vê-se que a Matemática Financeira utiliza bastante o conceito de funções logarítmicas nos cálculos referentes a juros compostos, tornando essencial a qualquer um esse tipo de conhecimento, afinal todos devem saber como calcular o montante de dinheiro (ou da dívida) que terão.

Na Geografia, costuma-se calcular o crescimento populacional por meio de funções logarítmicas. Em alguns países, na verdade, já se calcula um decrescimento por meio desse tipo de função, o que costuma preocupar os governantes, os quais já fizeram, baseados nesse tipo de estatística, alguns planos para aumento populacional.

Por fim, um dos campos em que mais se encontram exemplos da função logarítmica é a Biologia, e é nele o foco deste trabalho. Isso se dá principalmente pela possibilidade de interdisciplinaridade, a qual será discutida mais à frente.

É claro que olhos não matematicamente atentos não percebem essas coisas a olho nu, mas as funções logarítmicas estão presentes, por exemplo, em uma espécie rara de samambaia, no girassol, na galáxia NGC 3344, no voo do falcão peregrino e nas conchas marinhas de certos moluscos. Esses dois últimos serão mais aprofundados durante o trabalho.

3. ESPIRAL LOGARÍTMICA

Uma curiosidade interessante dentro da aplicação dos logaritmos é a relação do voo do falcão peregrino com a espiral logarítmica. Essa espiral teve seus estudos desenvolvidos principalmente pelo trabalho do matemático suíço Jacob Bernoulli, que viveu de 1654 a 1705.

A expressão da função é dada por $r(\theta) = R \times e^{\theta cotg(\alpha)}$, em coordenadas polares (r, θ). Para compreender o comportamento dessa função, precisamos assimilar o Sistema de Coordenadas Polares, cuja ideia para a construção é concebida a partir de um ponto O fixado chamado pólo e uma semi reta com origem em O denominada eixo polar num plano π abstrato. Um ponto P neste sistema é representado por (r, θ), em que r é a distância de O a P (r é o módulo do vetor $\widehat{OP}$) e θ é um ângulo orientado entre o vetor $\widehat{OP}$ e o eixo polar.

O que interessa, para entender o comportamento da espiral logarítmica, é fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares; para tanto, faremos identificações: a origem do plano cartesiano, o ponto O = (0,0) será relacionada à origem O no plano π e o semi-eixo X positivo será relacionado ao eixo polar. Com isso, um ponto P tem duas representações possíveis: P = (r, θ) e P = (x, y).

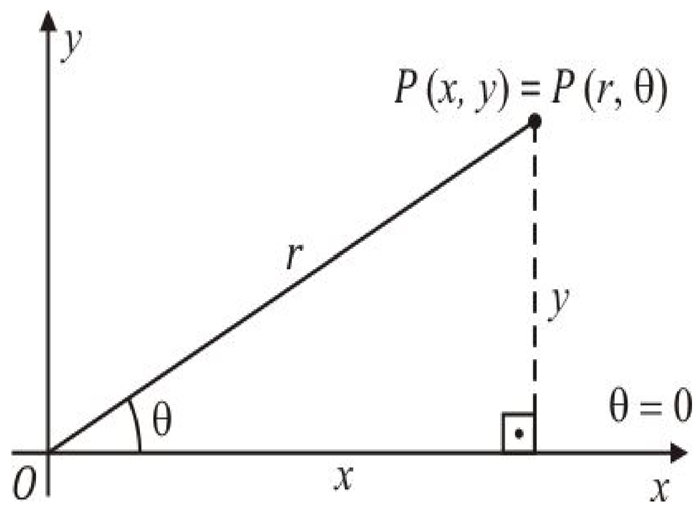

Imagem retirada do link:
https://www.obaricentrodamente.com/2016/06/o-sistema-de-coordenadas-polares.html

Essas coordenadas associam-se por trigonometria. Note que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ e, portanto, segue que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$; o módulo do vetor $\widehat{OP}$, dado por r, neste caso, é obtido da maneira que calculamos distância de dois pontos no $\Re^2$. Segue, então, que o valor de $r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Para ampliarmos o uso das coordenadas polares, considera-se também r < 0. Se um ponto Q = (r, θ), com r < 0, sua identificação é feita com o simétrico em relação ao pólo do ponto K = (-r, θ). A seguir, um exemplo de como isso é feito:

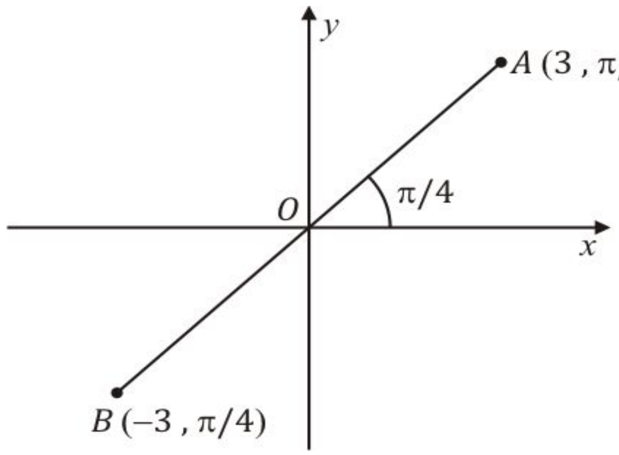

Imagem retirada do link:
https://www.obaricentrodamente.com/2016/06/o-sistema-de-coordenadas-polares.html

A partir disso, assim como estudamos funções do tipo y = f(x) no plano cartesiano, também podemos estudar funções expressas por r = r(θ) no sistema polar.

Retomando a expressão da espiral logarítmica, $r(\theta) = R \times e^{\theta cotg(\alpha)}$, onde R é uma constante real diferente de 0 chamada de raio relativo a $\theta = 0$ e mede a distância da origem O = (0,0) ao ponto A = (R, 0). A é ponto de partida da espiral, que dá infinitas voltas em torno da origem, aproximando-se dela ($\theta \leq 0$) mas nunca a atingindo ou se afastando da mesma ($\theta \geq 0$) e α é o ângulo (constante) entre a reta tangente em cada ponto P da espiral (ver na imagem abaixo os vários pontos P) com a reta que passa por P e pelo polo O.

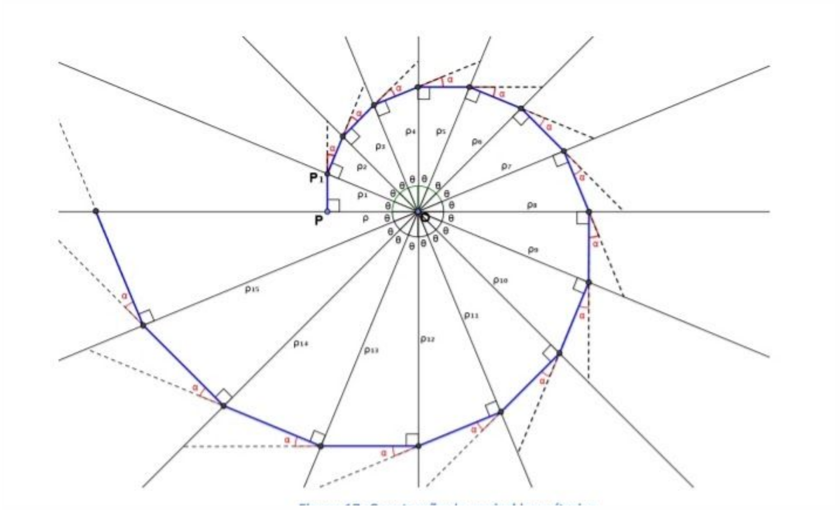

Imagem: Construção da espiral logarítmica, retirada do TCC de Felipe Olavo Silva.

Manipulando a função, com $R \neq 0$, podemos escrever a equação como: $ln(\frac{r}{R}) = \theta \text{ cotg } \alpha$, pois:

$r(\theta) = R \times e^{\theta cotg(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = e^{\theta cotg(\alpha)} \Leftrightarrow ln(\frac{r}{R}) = ln(e^{\theta cotg(\alpha)}) = \theta \text{ cotg}(\alpha)$

Ou seja, $\theta \text{ cotg}(\alpha)$ é o logaritmo neperiano da razão entre o raio para um "giro" θ e o raio para $\theta = 0$, por isso o nome espiral logarítmica, também conhecida como espiral equiangular e nomeada por Bernoulli como *Spira mirabilis* (espiral maravilhosa).

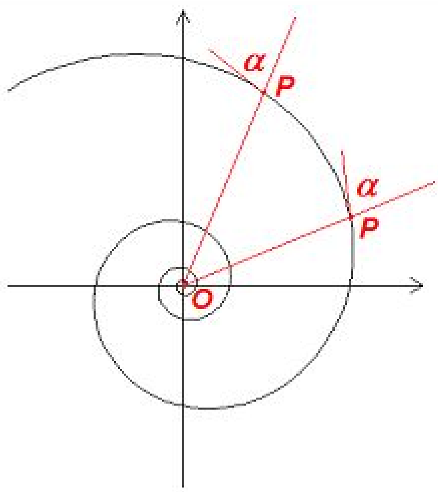

Imagem retirada do link http://www.mat.uc.pt/~picado/conchas/espiral.html

O falcão peregrino, uma das aves mais rápidas do reino animal, pode atingir até 320 km/h durante seus voos. Seu comportamento de voo é muito próximo ao formato de uma espiral logarítmica. O biólogo e pesquisador Vance A. Tucker da Universidade de Duke, na Carolina do Norte, passou anos pesquisando sobre esses animais. Ele achava curioso o fato dessas aves não usarem a menor distância para alcançarem suas presas e decidiu investigar esse fenômeno. Tucker concluiu, após experimentos em um túnel de vento, que isso ocorre porque o animal apresenta seus olhos nas laterais de sua cabeça e eles precisavam incliná-la num ângulo de 40º para um lado e para o outro, causando perda de velocidade nas aves. Para maximizar sua velocidade, os animais mantêm a cabeça em linha reta e percorrem a trajetória de uma espiral logarítmica para atingirem suas presas. A velocidade é máxima pela propriedade equiangular da espiral, uma vez que, com o voo em ângulo constante, não há perda de velocidade. A pesquisa do biólogo foi divulgada no periódico científico The Journal Of Experimental Biology no ano 2000.

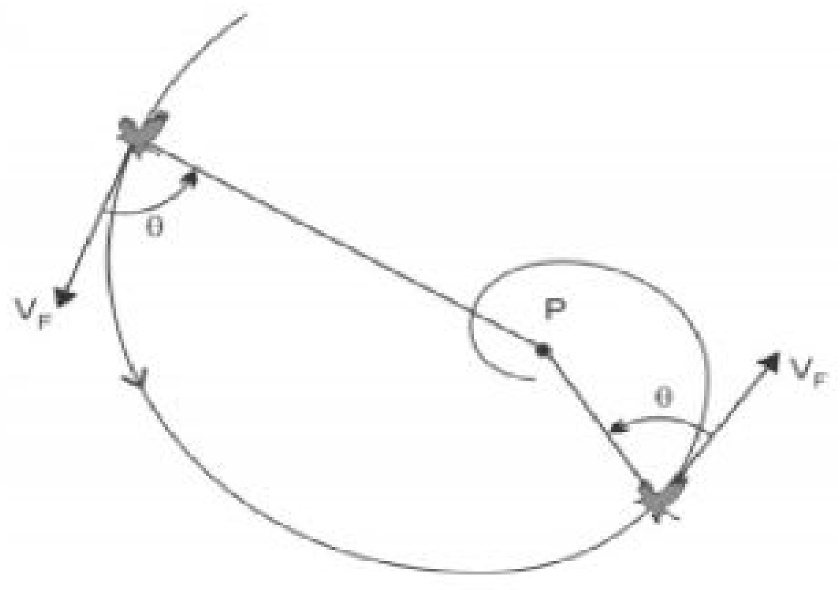

Imagem: Representação do voo do falcão peregrino; a presa é representada pelo ponto P, retirada do link https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150531715

Pode-se ver a espiral como forma predominante também em uma espécie rara de samambaia, no girassol, na galáxia NGC 3344, no caracol, e em muitos outros.

O *Nautilus*, que é um cefalópode marinho arcaico, possui uma concha formada por uma série de câmaras separadas que formam uma espiral. O animal ocupa a última câmara, e as outras são cheias de gás. Na natureza, tal forma ainda aparece na flor do girassol e no fruto da pinha.

Imagem: Conha do *Nautilus*, retirada do iStock.

4. ENSINO DO TEMA

Para o ensino do tema, utilizaremos a descoberta de Stifel: relacionando progressões geométricas e aritméticas, conseguiu descrever melhor a propriedade fundamental dos logaritmos, a qual diz que $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall x, y \in R_+$.

Para demonstrar a relação das progressões com o log, será mostrado um exemplo numérico aos alunos. Tome a PA de razão 1 e a PG de razão 2:

PA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PG	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Tome a = 2 e pegue um número, tal que $\log_2 x=4$ e $\log_2 y=7$. Quer-se calcular $\log_2(xy)$.

Calculando por exponencial e logaritmo:

Sabemos, pela definição de log, que x= 2^4 e y= 2^7 . Assim,

$$\log_2(xy) = \log_2(2^4 . 2^7) = \log_2(2^{4+7}) = \log_2(2^{11}) = 11$$

Note que 11= 4+7 e, assim, 11 = $\log_2 x + \log_2 y$.

Logo, $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.

Para o ensino, vamos mostrar que a propriedade funciona utilizando PG.

Calculando x = $2^4 = 16$, y = $2^7 = 128$ e x.y = 16 . 128 = 2048.

Para calcular o $\log_2(xy)$, temos que $\log_2(xy) = \log_2(2048) = A \Rightarrow 2^A = 2048$, para achar A, basta olhar qual expoente corresponde ao número 2048 (olhar na tabela), ou seja, A= 11.

Portanto, tem-se que $\log_2(16 . 128) = \log_2(2048) = 11 = 4+7 = \log_2 16 + \log_2 128$.

De forma geral, pega-se uma PA de razão 1 para ser os expoentes e uma PG de razão a, sendo a base do logaritmo que se deseja calcular. Somando dois expoentes, obtém-se o expoente cujo correspondente da PG é resultado da multiplicação entre os correspondentes dos dois expoentes que foram somados.

Pode-se ensinar o logaritmo e suas propriedades a partir dessa "demonstração" da relação entre PA, PG e log.

BIBLIOGRAFIA

- Paterlini, R.R. Aritmética dos números reais
- https://musicaeadoracao.com.br/25383/a-musica-e-os-logaritmos/
- https://brasilescola.uol.com.br/quimica/calculos-envolvendo-ph-solucoes.htm
- http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/bitstream/handle/unirio/11911/MMat%2006-2015.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150531715
- https://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html
- Tucker, Vance A. The deep fovea, sideways vision and spiral flight paths in raptors. Publicada em The Journal of Experimental Biology.
- http://www2.unemat.br/revistafaed/content/vol/vol_16/artigo_16/95_114.pdf