Universidade de São Paulo – MAT0315 Introdução à Analise

Aline Vitoria Farias de Lima 11371795
Juliana Zen 3466106
Mariane de Souza Castro 10549922
Thauany Gerez Cavalcante 10738082

GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS E A CRISE DOS INCOMENSURÁVEIS

Introdução

Neste trabalho falaremos sobre a descoberta dos incomensuráveis, a primeira evidência da necessidade dos números irracionais e como os Gregos lidaram e contornaram essa novidade que, para alguns, representou um momento de crise no desenvolvimento da matemática. Mostraremos como essa crise foi superada, ainda no 4.º século a.C por Eudoxo (aprox. 408-355 a.C.), da escola de Platão, quem desenvolveu uma teoria das proporções que permitiu superar a dificuldade dos incomensuráveis sem a necessidade dos números irracionais. Muito interessante é o fato de que as mesmas ideias de Eudoxo seriam utilizadas mais de dois milênios depois por Richard Dedekind (1831-1916) na construção de uma teoria rigorosa dos números reais.

A matemática grega

O que sabemos sobre o conhecimento dos gregos da antiguidade chegou até nós pelos escritos de Aristóteles, Platão e dos *Elementos* de Euclides.

Aristóteles, na *Metafísica*, atribui aos pitagóricos o estudo da matemática pelos seus princípios e a separação em relação a filosofia, para eles os números são capazes de uma explicação global que permite simbolizar a totalidade do cosmos.

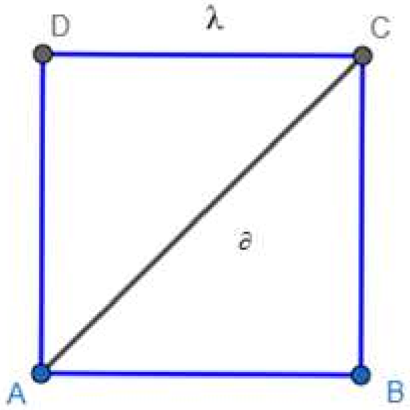
Assim, para os pitagóricos "todas as propriedades das coisas, bem como seus modos e seus comportamentos, podiam ser reduzidas a propriedades que as coisas têm em virtude de serem contáveis." (ROQUE, p.91)

Grandezas comensuráveis e incomensuráveis

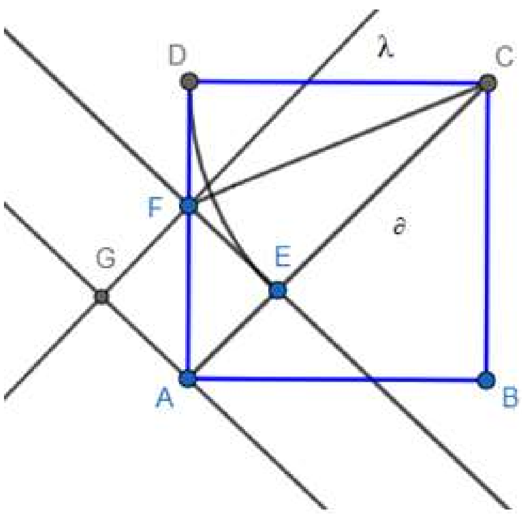
Sejam três segmentos AB, CD e EF. Suponha que o segmento EF cabe k vezes em AB e o mesmo segmento EF cabe m vezes em CD. Seja u a medida de EF. Então, u é uma unidade comum a AB e a CD (AB = k.u e CD = m.u). Quando isso acontece dizemos que os segmentos AB e CD são comensuráveis (= podem ser medidos usando-se a mesma unidade).

Não se sabe se a descoberta dos segmentos incomensuráveis foi feita por um argumento puramente numérico ou alguma construção geométrica, como a que vamos descrever adiante, sobre a diagonal e o lado de um quadrado.

Seja ABCD um quadrado cuja diagonal é ∂ = AC e lado λ = CD.



Supondo ∂ e λ comensuráveis, então existirá um terceiro segmento σ submúltiplo comum de ∂ e λ. Traçando o arco DE com centro em C e o segmento FE tangente a esse arco em E, temos os triângulos retângulos CDF e CEF, $CD \equiv CE$. Como CF é comum, $DF \equiv FE$. Traçando duas retas, uma paralela a AE passando por F e outra paralela a EF passando por A, temos o ponto G e o quadrado AEFG



Portanto, ∂ = AC = CE + EA = λ + EA e λ = CD = AF + FD = AF + AE.

Ou seja, ∂ = λ + EA e λ = AF + AE.

Como o segmento σ submúltiplo comum de ∂ e λ, concluímos por $\partial = \lambda + EA$ que σ também é submúltiplo de AE. De $\lambda = AF + AE$ temos que σ também é submúltiplo de AF. Logo, σ será submúltiplo de ∂ e λ, então σ também será submúltiplo comum de AE e AF, lado e diagonal do quadrado ABCD, respectivamente.

Ávila conclui:

> A mesma construção geométrica que nos permitiu passar do quadrado original ao quadrado AEFG pode ser repetida com este último para chegarmos a um quadrado menor ainda; e assim por diante, indefinidamente; e esses quadrados vão se tornando arbitrariamente pequenos, pois, como é fácil ver, as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles a seu sucessor. Dessa maneira, provamos que o segmento deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejarmos. Evidentemente, isso é um absurdo! Somos, pois, levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado CD e a diagonal AC do quadrado original sejam comensuráveis. Concluímos, pois, que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis. (ÁVILA, G. 2001, P. 21).

A crise

O principal problema posto pela possibilidade de haver segmentos incomensuráveis é a contradição da ideia intuitiva de que dois deles sempre possuem uma unidade de medida comum. Ou seja, ainda que cada segmento admita ser dividido em partes muito pequenas, o fato de dois segmentos não serem comensuráveis significa que não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos. Essa descoberta contradiz o senso comum.

Segundo, Carlos H. B. Gonçalves e Claudio Possani no artigo "Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga", existem duas versões quanto à crise dos incomensuráveis. A primeira, e mais popular, trata do conflito entre a incomensurabilidade e um preceito pitagórico; a segunda trata da falta evidências científicas a respeito da crise, mas essa versão seria mais conhecida apenas entre estudiosos da história da matemática, como discutiremos mais adiante.

Segundo Morris Kaline, em “Mathematical thought from ancient to modern times”:

> “Números para os pitagóricos significavam apenas números inteiros. Uma razão de dois números inteiros não era uma fração nem, portanto, um outro tipo de número, como ocorre modernamente. [...] Eles chamavam razões expressas por números inteiros razões comensuráveis, o que significa que as duas quantidades são medidas por uma unidade comum, e eles chamavam razões não exprimíveis assim razões incomensuráveis. Assim o que expressamos como √2/2 é uma razão incomensurável.” (KLINE, M. 1972, p. 32)

Para Pitágoras, o número era a essência de todos os fenômenos, transpassando por toda a Natureza, porém com a descoberta dos incomensuráveis esse princípio deveria ser descartado, pois como poderia um número ser a essência da natureza se não era possível expressar nem mesmo a razão entre dois segmentos com um número.

Mas há controvérsias, existem autores que discordam com a existência da crise como resultado da descoberta da incomensurabilidade. Ao contrário, sua existência seria uma circunstância positiva, pois teria sido responsável pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razões e proporções. A partir da década de 1960, estudos mostraram que a leitura mais apurada das fontes antigas torna a história da crise uma criação, apontando uma falta de rigidez nas análises das fontes. Hoje, a partir das novas análises, é a versão mais aceita entre matemáticos.

A teoria das proporções de Euxodo

Hoje, podemos perceber que os possíveis problemas que surgiram com a descoberta dos incomensuráveis seriam facilmente resolvidos se já conhecem os números fracionários e os irracionais, o que só ocorreu nos tempos modernos.

Sendo assim, os gregos desenvolveram uma teoria das proporções onde foi possível falar em igualdade de razões independente das grandezas serem comensuráveis ou não. Foi Euxodo (408-355 aproximadamente a.C) quem desenvolveu essa teoria de forma brilhante que foi exposta no Livro V dos Elementos de Euclides.

Vale lembrar que os gregos não tinham uma definição precisa de “razão”, a definição 3, proposta no livro V, diz apenas que: “Uma razão (logos) é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo (dois comprimentos, duas áreas, dois volumes).”. Assim, no caso de dois segmentos comensuráveis A e B, Eudoxo viu que dizer que A esta para

B assim como m esta para n equivale dizer que $nA = mB$, então no caso de quatro segmentos dizer que A esta para B assim como C esta para D pode ser expresso como:

$$nA = mB \text{ e } nC = mD$$

Acontece que, se A e B forem incomensuráveis, igualdades do tipo nA = mB nunca acontecerão. Todavia, dados dois números inteiros quaisquer m e n, podemos certamente testar se: $nA > mB, \quad nA = mB \quad ou \quad nA < mB$

E igualmente se: :$nC > mD, \quad nC = mD \quad ou \quad nC < mD$

Esse teste é utilizado para definir igualdade de razões (tanto no caso comensurável quanto no incomensurável) como segue:

Definição (de Eudoxo): *Dadas quatro grandezas da mesma espécie, A, B, C e D (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C esta para D se quaisquer que sejam os números m e n, se tenha:*

$$nA > mB \leftrightarrow nC > mD; \qquad nA = mB \leftrightarrow nC = mD; \qquad nA < mB \leftrightarrow nC < mD$$

Embora essa definição de igualdade de razões e a construção desta teoria das proporções tenha resolvido o caso dos incomensuráveis, ainda existiam dificuldades na suposta harmonia entre a geometria e os números, dificuldade essa que só foi definitivamente superada com a criação da teoria dos números reais (racionais e irracionais) no século passado, devido, sobretudo aos trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916).

Comparando os racionais aos pontos da reta, ele observou que existem mais pontos na reta do que os que podem ser representados por números racionais. Mas como definir esses números? A argumentação de Dedekind recorria aos gregos para dizer que eles já sabiam da existência de grandezas incomensuráveis. No entanto, não é possível usar a reta para definir os números aritmeticamente, pois os conceitos matemáticos não devem ser estabelecidos com base na intuição geométrica.

Sobre o ensino do tema

Para despertar o interesse dos alunos é importante contextualizar o ensino do números racionais e dos números irracionais, mostrar como foi feita a sua descoberta e sua diferenciação. Iezzi e Murakami definem o os “números racionais como o conjunto dos pares ordenados (ou frações) a/b, em que a $\in$ Z e b $\in$ Z*” e Ávila define os números irracionais como os “números cuja representação não é nem finita nem periódica”.

Podemos apresentar aos alunos a reta numérica e que entre dois números racionais sempre existe um outro racional que pode ser obtido através da média aritmética. Com Por exemplo, entre 1 e 2 temos 3/2, entre 1 e 3/2 temos 5/4 e assim por diante, infinitas vezes, pontilhando a reta numérica.

Ao nos depararmos com os irracionais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, podemos propor aos alunos um calculo aproximado de seus valores, por exemplo, para o calculo de $\sqrt{2}$ podemos começar dizendo que o valor esperado é maior que um e menor que dois, depois melhorando a aproximação podemos dizer que esta entre 1,4 e 1,5, depois entre 1,41 e 1,49 e desta forma realçar que perto de um irracional sempre existe um racional um pouco maior e outro um pouco menor.

Desde modo, faz se necessário aguçar a curiosidade dos alunos a respeito dos irracionais e das grandezas incomensuráveis.

Conclusão

Levando em consideração a importância dos números racionais e irracionais ao longo do tempo, é indubitavelmente necessário um melhor e mais detalhado aprofundamento do assunto aos jovens desde o início da matéria no ensino fundamental, mostrando-lhes mais sobre o conteúdo histórico envolvendo Platão, Euxodo e mais a frente, Richard Dedekind.

A desvinculação da história no ensino da matemática interfere diretamente na absorção e maior entendimento da matéria. Fatos pontuais como o pensamento pitagórico e a teoria desenvolvida por Euxodo ajudam na melhor compreensão do "por quê" este tema é necessário e está sendo passado. Dessa forma, falar sobre frações, razões, grandezas comensuráveis e incomensuráveis, se torna mais intuitivo e interessante para aqueles que estão aprendendo, ao invés de contas e mais contas sem nenhum começo, meio e fim.

Referências

ÁVILA, Geraldo. Analise Matemática para Licenciatura. 3ª. Ed. Blucher. 2006 ÁVILA, Geraldo.

BROLEZZI, Carlos. A matemática Viva, números irracionais. Disponível em http://eaulas.usp.br/portal/video.action;jsessionid=007D7EC8FCB57CA0DF564894EA51335C?idPlaylist=5216 pesquisado em 28 de outubro de 2020.

Grandezas incomensuráveis e números irracionais. Disponível em http://www.im.ufrj.br/monolic/arquivospararedacao/bibliografia/artigos/Avila_RPM_2005.pdf pesquisado em 28 de outubro de 2020.

JOAQUIM, Claudia Verginia Dametto, Jr. SGAMBATTI, Milton, QUINTILIO, Dalva. Matemática. Caderno de Atividades 7°ano Vol. 1. 3° ed. São Paulo: Editora Policarpo, 2010.

JOAQUIM, Claudia Verginia Dametto, Jr. SGAMBATTI, Milton, QUINTILIO, Dalva. Matemática. Caderno de Atividades 7°ano Vol. 2. 3° ed. São Paulo: Editora Policarpo, 2010.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de, FUGITA, Felipe, FERNANDES, Marco Antonio Martins. Para viver juntos. Matemática. Ensino fundamental 6° ano. 2° ed. São Paulo: Edições SM Ltda, 2011.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de, FUGITA, Felipe e FERNANDES, Marco Antonio Martins. Para viver juntos. Matemática. Ensino fundamental 7° ano. 2° ed. São Paulo: Edições SM Ltda, 2011.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de, FUGITA, Felipe. Geração Alpha. Matemática 7. 1ª.ed. São Paulo: Edições SM Ltda, 2017.

KLINE, M. Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford: Oxford University Press, 1972. v. 1.

IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 1. 7° ed. São Paulo. Atual, 1993